

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 34: (H02T1A2) Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{5 - 4 \cos(2x)} dx$$

Aufgabe 35: (H06T1A5)

- Eine meromorphe Funktion f sei in der Form $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^2}$ mit holomorphem h und $h(z_0) \neq 0$ gegeben. Wie berechnet man das Residuum von f in z_0 ?
- Geben Sie für $f(z) = \frac{1}{(4+z^2)^2}$ alle isolierten Singularitäten in \mathbb{C} an samt ihrem Typ und bei Polen auch ihre Ordnung.
- Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$.

Aufgabe 36: (F19T2A5)

- Gegeben sei die Menge $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 2|y| \leq x \leq 6\}$. Skizzieren Sie diese Menge in einem kartesischen Koordinatensystem und berechnen Sie den Wert des Integrals $\iint_{\Delta} (x-y)^2 dx dy$.
- Gegeben sei die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{1+z^3}$, wobei der Definitionsbereich durch $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ definiert werde. Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\gamma} f(z) dz$ mit $\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto 2e^{it}$. Entscheiden Sie mit Begründung, ob f eine holomorphe Stammfunktion auf D besitzt.