

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 31: (F19T3A4)

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = (z^2 + 4\pi^2) \sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

- a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f .
- b) Berechnen Sie für alle reell ganzzahligen Vielfachen von π das Residuum von $\frac{1}{f}$.
- c) Erstellen Sie eine beschriftete Skizze der Menge

$$M = \{t - i \cos(t) : t \in [-\pi, \pi]\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 1, |z - i| = \pi\}$$

und bestimmen Sie einen geschlossenen Weg Γ , so daß M das Bild von Γ ist.

- d) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_{\Gamma} \frac{dz}{f(z)}$.

Aufgabe 32: (H20T1A3)

- a) Begründen Sie, daß das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2 \cos(\theta) + \sin(\theta)}$$

existiert.

- b) Bestimmen Sie den Wert dieses Integrals.

Aufgabe 33: (H20T3A3)

- a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{2iz}}{\cosh(z)} dz,$$

wobei Γ der Weg ist, der das Rechteck

$$R = \{z \in \mathbb{C} : -n \leq \operatorname{Re}(z) \leq n, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq n\pi\}$$

im Gegenuhrzeigersinn umschließt.

- b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2iz}}{\cosh(z)} dz$$

unter Verwendung von (a) und stellen Sie es als Reihe dar. Begründen Sie die Zwischenschritte.