

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 28: (F08T3A3)

Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph und es gelte $|f(z)| \geq |e^z|$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Man zeige, daß f in allen Punkten aus \mathbb{Z} holomorph ergänzbar ist und daß $f(z) = Ce^z$ mit einer Konstanten C gilt.

Aufgabe 29: (H20T2A4)

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$. Bestimmen Sie

$$z \mapsto \frac{1}{1+z} \sin\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{\sin(z-1)}{z-1}$$

- a) bei 1
- b) bei -1 und
- c) bei 0

jeweils den Typ der isolierten Singularität von f und berechnen Sie das Residuum.

Aufgabe 30: (F10T1A5) Bestimmen Sie alle Singularitäten von

$$f(z) = \frac{e^{\sin(z)} - \cos(z) - z}{(\sin(z))^2}$$

sowie deren Typ (einschließlich der Ordnung jedes auftretenden Pols). Sie dürfen die Nullstellen der komplexen Sinusfunktion als bekannt voraussetzen.