Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 1: (F03T3A4) Sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und in der zweiten Variablen lokal Lipschitzstetig. Geben Sie die Definition des Begriffs der maximalen Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

an. Bestimmen Sie die maximale Lösung des Problems (1) im Falle $f(x, y) = x^2y^2$.

Aufgabe 2: (H11T3A5)

Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\gamma = \sup\limits_{t\geq 0} \int\limits_0^t p(s)ds \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie für $x_0 \in \mathbb{R}$ die Lösungen $x(t)$ des Anfangswertproblems

$$x'(t) = p(t)e^{x(t)}, \quad x(0) = x_0$$

für $t > 0$.

b) Beweisen Sie: Ist $1 > \gamma e^{x_0}$, so existiert die Lösung in (a) für alle Zeiten $t > 0$.

Aufgabe 3: (H08T1A4)
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich der Lösung an:

a) $y' = \frac{y^2-t^2}{2ty}, \quad y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

b) $y' - \frac{t}{t^2-1}y = \sqrt{t^2-1}, \quad y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$