Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 33: (H19T1A1)

a) Für $c \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ bezeichne $\partial B(c, r)$ den Rand der Kreisscheibe mit Mittelpunkt c und Radius r in der komplexen Ebene. Der Rand der Kreisscheibe werde einmal entgegen dem Uhrzeigersinn, dh. in mathematisch positiver Richtung, durchlaufen. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\partial B(20,19)} \frac{\cos(z^2+1)}{z^2-2019}dz \quad \text{und} \quad \int_{\partial B(0,2)} \frac{\sin(z)}{(z-1)^3}dz$$

b) Berechnen Sie die Umlaufzahl/Windungszahl um Null für den Weg

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\cos(e^{it})^2 \end{array} .$$

Aufgabe 34: (H06T1A4) Zeigen Sie:

a) Ist $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|h(z)|}{|z|^{n+1}} = 0,$$

so ist h eine komplexe Polynomfunktion vom Grad $\leq n$.

b) Ist $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\mathrm{Re}\,(h)$ beschränkt, so ist h konstant.

Aufgabe 35: (H02T1A1) Sei f eine holomorphe Funktion auf dem Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 + \rho\}$ mit $\rho > 0$ und

$$|f(e^{i\theta})| = c \quad \text{für } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Es sei $z = 0$ eine einfache Nullstelle von f und $f(z) \neq 0$ für $z \in G\backslash\{0\}$. Man zeige: Es existiert ein $c_1 \in \mathbb{C}$ mit $|c_1| = c$, so daß $f(z) = c_1 z$ für alle $z \in G$ gilt.

Aufgabe 36: (H10T2A2) Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion für die $|f(0)| < 1$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gilt. Man zeige, daß dann sogar $|f(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gelten muß.

Aufgabe 37: (F09T3A4)
Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ der offene Einheitskreis um 0 in $\mathbb{C}$.

a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit $f(z)^3 = z^2$ für alle $z \in \mathbb{E}$?

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n^4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$?

c) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(0) = 2i, \qquad \lim_{|z|\to 1} |f(z)| = 1?$$

Aufgabe 38: (H02T2A1)
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gibt eine holomorphe Funktion f auf einer offenen Umgebung um 0 mit der Eigenschaft

$$|f^{(n)}(0)| \geq (n!)^2 \qquad \text{für alle} n \in \mathbb{N}.$$

b) Es gibt keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$f(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) > 0, \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$$

c) Jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$\mathrm{Re}\, f(z) = (\mathrm{Im}\, f(z))^2 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

ist konstant.