Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 29: (H19T3A2)
Gegeben sei die Abbildung $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x(1-y),xy) \end{array}$.

a) Zeigen Sie, dass f den Streifen $S :=]0,\infty[\times]0,1[$ diffeomorph auf den ersten Quadranten $Q :=]0,\infty[^2$ abbildet (dh. f bildet S bijektiv auf Q ab und $f : S \to Q$ sowie die Umkehrabbildung $f^{-1} : Q \to S$ sind stetig differenzierbar.)

b) Wir identifizieren nun $\mathbb{R}^2$ in kanonischer Weise mit $\mathbb{C}$ und fassen f als Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf. Bildet dann f den Streifen $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) > 0, 0 < \mathrm{Im}\,(z) < 1\}$ konform (dh. biholomorph) auf den ersten Quadranten $Q = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(w) > 0, \mathrm{Im}\,(w) > 0\}$ ab? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 30: (H20T1A2)
Gegeben sei die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, dh. $f_0 = 1 = f_1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$, sowie die Potenzreihe $F(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ und $R \in [0,\infty]$ sei der Konvergenzradius von F.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums, daß $R \geq \frac{1}{2}$ ist.

b) Zeigen Sie, daß $(1-z-z^2)F(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ gilt.

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R von F.

Aufgabe 31: (H12T1A1)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Bei richtigen Aussagen verweisen Sie auf einen passenden Satz der Funktionentheorie , bei falschen geben Sie ein Gegenbeispiel.

a) Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in G mit $f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $f = 0$.

b) Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in G mit Häufungspunkt und $f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $f = 0$.

c) Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in G mit Häufungspunkt in G und $f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $f = 0$.

d) Ist f auf G beschränkt, so ist f konstant.

e) Ist $G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und f auf G beschränkt, so ist f konstant.

f) Ist $G = \mathbb{C}$ und f auf G beschränkt, so ist f konstant.

Aufgabe 32: (H20T2A3)
Für $r > 0$ sei $K_r(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ die offene Kreisscheibe um 0 mit Radius r.

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{z^k}{k}$$

und zeigen Sie, daß $\begin{array}{rcl} f_R : K_R(0) & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{z^k}{k} \end{array}$ holomorph ist.

b) Zeigen Sie, daß für $\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}e^{-2it} \end{array}$ das Integral

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f_R(z)}{\left(z - \frac{1}{4}\right)^2} dz$$

existiert, und berechnen Sie es.