Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 25: (H08T3A1)
Seien $a, b > 0$. Im $\mathbb{R}^2$ sei das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) x - \frac{ay}{b} \\ \dot{y} &= \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) y + \frac{bx}{a} \end{aligned}$$

gegeben. Zeigen Sie:

a) Ist $\begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$ eine Lösung dieses Systems, so erfüllt $r^2(t) := \dfrac{x^2(t)}{a^2} + \dfrac{y^2(t)}{b^2}$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} r^2 = 2(1 - r^2) r^2$$

b) Das System besitzt eine nichtkonstante periodische Lösung $\mu : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x_0(t), y_0(t)) \end{array}$.

c) Die periodische Lösung μ aus (b) ist stabil in dem Sinn, daß $r^2(t) \to r_0^2(t) = \frac{x_0^2(t)}{a^2} + \frac{y_0^2(t)}{b^2}$, wenn $r^2(0) \to r_0^2(0)$.

Aufgabe 26: (H01T2A1)
Skizzieren Sie die Phasenportraits der ebenen autonomen Systeme $\dot{x} = Ax$ für die drei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 27: (F09T2A1)
Gegeben sei folgendes Differentialgleichungssystem

$$x' = -y + x \sin(x^2 + y^2) \tag{1}$$
$$y' = x + y \sin(x^2 + y^2) \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie alle periodischen Orbits.

b) Skizzieren Sie das Phasenportrait.

Hinweis: Man transformiere auf Polarkoordinaten. Zunächst bestimme man eine Differentialgleichung für $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Aufgabe 28: (H20T3A5)
Gegeben sind drei Folgen $\left(\begin{array}{rcl} f_n : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} e^{-nx} \end{array} \right)_{n \in \mathbb{N}}$, $\left(\begin{array}{rcl} g_n : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n\sqrt{x} e^{-nx} \end{array} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ und $\left(\begin{array}{rcl} h_n : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n^2\sqrt{x} e^{-nx} \end{array} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen. Entscheiden Sie jeweils (mit Begründung), welche dieser drei Folgen

a) beschränkt in $C^0([0,1])$ ist

b) punktweise konvergiert

c) gleichmäßig konvergiert

d) konvergentes Integral hat (dh. entscheiden Sie, ob $\int\limits_0^1 f_n(x)dx$, $\int\limits_0^1 g_n(x)dx$ beziehungsweise $\int\limits_0^1 h_n(x)dx$ konvergieren).