

Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 21: (H17T1A3)

Gegeben sei das ebene autonome System

$$\begin{aligned}x' &= x^2y + 3y =: f(x, y) \\ y' &= -xy^2 - 3x =: g(x, y).\end{aligned}$$

Man zeige:

- a) Der Nullpunkt ist die einzige Ruhelage des Systems.
- b) Das System ist ein Hamiltonsches System, dh. es existiert eine stetig differenzierbare Funktion $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial H}{\partial x} = -g$ und $\frac{\partial H}{\partial y} = f$.
- c) H ist konstant auf den Lösungen des Systems, dh. für jede Lösung φ gilt $H \circ \varphi$ ist konstant.
- d) Jede Lösung φ ist beschränkt.
- e) Jede maximale (dh. nicht fortsetzbare) Lösung φ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
- f) Die Nulllösung ist stabil, aber nicht attraktiv.

Aufgabe 22: (H09T2A1)

Man bestimme alle Gleichgewichtspunkte des ebenen autonomen Systems

$$\begin{aligned}x' &= 2 - xy \\ y' &= \frac{x}{2} - y^3\end{aligned}$$

und untersuche jeden der Gleichgewichtspunkte auf Stabilität, asymptotische Stabilität bzw. Instabilität.

Aufgabe 23: (H08T2A2)

Seien σ, r und b positive Konstanten. Die Lorenz-Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned}x' &= \sigma(y - x) \\ y' &= rx - y - xz \\ z' &= xy - bz\end{aligned}$$

- a) Zeigen Sie, daß der Nullpunkt für $r > 1$ ein instabiler Gleichgewichtspunkt ist.
- b) Zeigen Sie sowohl durch Linearisierung als auch unter Verwendung der Lyapunov-Funktion $V(x, y, z) := x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$, daß der Nullpunkt für $0 < r < 1$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

Aufgabe 24: (H07T3A4)

Gegeben sei das ebene autonome System

$$\begin{aligned}x' &= y \cos(x) \\ y' &= \sin(x)\end{aligned}$$

- a) Begründen Sie, warum das obige System für jeden Anfangswert (x_0, y_0) eindeutig lösbar ist und warum die Lösungen für alle $t \in \mathbb{R}$ existieren.
- b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems und untersuchen Sie diese auf Stabilität.