Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 17: (H06T1A3)
Gegeben sei ein lineares System erster Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form

$$u' = Au$$

mit einer 2×2-Matrix mit komplexen Koeffizienten.

a) Welche Bedingung an die Eigenwerte und Eigenräume von A sind äquivalent damit, daß die triviale Lösung $u_0 \equiv 0$ stabil bei $t \to \infty$ ist, dh, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle Lösungen u mit $|u(0)| < \delta$ gilt $|u(t)| < \varepsilon$ für alle $t > 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Welche Bedingung an die Eigenwerte von A sind äquivalent damit, daß die triviale Lösung sogar asymptotisch stabil ist, dh. daß sie einerseits stabil ist und zusätzlich $|u(t)| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt für alle Lösungen mit $|u(0)| < \delta$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 18: (H07T3A5)
Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung

$$\frac{d^3x}{dt^3} + x = 0 \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1).

b) Bestimmen Sie alle Startwerte $(x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0)) \in \mathbb{R}^3$, so daß für deren eindeutige Lösung $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$.

Aufgabe 19: (H09T3A5)
Finden Sie die allgemeine Lösung des linearen homogenen Systems

$$\dot{\omega} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \omega$$

für $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\lambda < 0$. Welchen Typs ist das Gleichgewicht $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$? Skizieren Sie das Phasenportrait, begründen Sie seine Hauptmerkmale.

Aufgabe 20: (H17T3A3)
Für $u_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man für $t \geq 0$ das Anfangswertproblem

$$u'(t) = u(t) + \frac{1}{1+t}, \quad u(0) = u_0.$$

Zeigen Sie:

a) Für jedes u_0 existiert eine eindeutige Lösung auf ganz $\mathbb{R}^+$.

b) $\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$ für jedes $u_0 \geq 0$.

c) Es existiert ein $u_0 < 0$, so daß $\lim_{t\to\infty} u(t) = -\infty$.

d) Es existiert ein $\alpha < 0$ so daß $\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$ für jedes $u_0 > \alpha$, $\lim_{t\to\infty} u(t) = -\infty$ für jedes $u_0 < \alpha$ und $\lim_{t\to\infty} u(t) \in \mathbb{R}$ für $u_0 = \alpha$.