

Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 13: (F11T1A2)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' = e^{4t}$$

Aufgabe 14: (H13T1A4) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}), \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = Ax$$

an. Berechnen Sie auch die Lösung, die der Anfangsbedingung $x(0) = v$ genügt und begründen Sie, warum diese Lösung eindeutig ist.

Aufgabe 15: (F11T3A1)

Seien $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $b(t) := \begin{pmatrix} -t \\ e^{-t} \\ 1+t \end{pmatrix}$, $x_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$.
- Berechnen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax + b(t)$, $x(0) = x_0$.

Aufgabe 16: (H05T2A5)

Es sei A eine nilpotente reelle $n \times n$ Matrix mit $A^k = 0$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m > k$. Zeigen Sie, daß für eine Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = Ay$ die Asymptotik

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|y(t)\|}{t^m} = 0 \tag{1}$$

gilt.