Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 9: (F18T1A5)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt[3]{y^2} \quad \text{und} \quad y(0) = 0 \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie alle auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Lösungen von (1). Ein expliziter Nachweis, daß es keine weiteren Lösungen gibt, ist nicht erforderlich.

b) Bestimmen Sie alle $b \in \mathbb{R}$, so daß es eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung von (1) gibt, welche neben $y(0) = 0$ auch $y(1) = b$ erfüllt.

Aufgabe 10: (H14T1A5)
Gegeben sei das autonome zweidimensionale Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \exp(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= -x \exp(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, daß dieses System zu jedem Anfangswert genau eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung besitzt.

b) Zeigen Sie, daß die Orbits der Lösungen in konzentrischen Kreislinien (einschließlich Radius 0) um den Ursprung enthalten sind.

c) Zeigen Sie, daß jede nichtkonstante maximale Lösung periodisch ist, und bestimmen Sie die Periodenlänge.

Aufgabe 11: (F19T2A4)

a) Zeigen Sie, daß für jedes $\xi > -1$ das Anfangswertproblem

$$x' = \frac{1}{x+t} - 1 \quad , \quad x(1) = \xi \tag{2}$$

eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Bestimmen Sie für $\xi > -1$ die maximale Lösung λ_ξ von (2).
Hinweis: Das Verwenden von $y = x + t$ kann hier helfen.

c) Zeigen Sie, daß $\lambda_0 : I_0 \to \mathbb{R}$ eine asymptotisch stabile Lösung von $x' = \frac{1}{x+t} - 1$ ist.

Aufgabe 12: (F19T1A3)
Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Es sei $x_0 \in]-\pi, \pi[$ und $\varphi : I_{max} \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = 1 + \cos(x), \quad x(0) = x_0.$$

Dann ist φ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert (also $I_{max} = \mathbb{R}$) und $\varphi(t) \in]-\pi, \pi[$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig. Dann ist jede nicht-konstante Lösung der autonomen Differentialgleichung $x' = f(x)$ streng monoton.