Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 5: (H17T1A4) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x' = \frac{x^2}{1+t^2}, \quad x(0) = c,$$

wobei $c > 0$ ein positiver Parameter ist.

a) Man zeige: Ist I ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems, so hat φ keine Nullstelle.

b) Man finde ein offenes Intervall I mit $0 \in I$ und eine Lösung $\varphi_c : I \to \mathbb{R}$.

c) Man setze φ_c zu einer maximalen Lösung $\widetilde{\varphi}_c :]t^-(c), t^+(c)[\to \mathbb{R}$ fort. Wie lauten die Entweichzeiten $t^-(c)$ und $t^+(c)$ und wie verhält sich $\widetilde{\varphi}_c(t)$ für $t \to t^+(c)$ und $t \to t^-(c)$?

Aufgabe 6: (H09T2A2) Gegeben sei die skalare Differentialgleichung

$$x'(2x^3 + 2x + 2xt^2) = -2t^3 - 2x^2 t$$

Man zeige, daß jede Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$

a) beschränkt bleibt

b) nicht für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ existiert.

Hinweis: Man finde ein geeignetes erstes Integral $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 7: (F13T2A3)
Sei $L \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + Ly(x) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1 \tag{1}$$

a) Zeigen Sie mittels Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$, daß (1) eine Lösung $y :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Ist die Lösung aus (a) auf $]-1, 1[$ eindeutig bestimmt?

Hinweis zu (a): Bestimmen Sie zunächst durch formale Differentiation der Potenzreihe die Koeffizienten c_j. Untersuchen Sie dann den Konvergenzradius der so definierten Potenzreihe. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die formale Differentiation nun gerechtfertigt?

Aufgabe 8: (F06T2A5)
Es sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^∞−Vektorfeld mit $\langle v(x), x\rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = 1$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet. Beweisen Sie, daß jede maximale Lösung von

$$\frac{dx}{dt} = v(x) \quad \text{mit} \quad \|x(0)\| = 1$$

auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und stets $\|x(t)\| = 1$ erfüllt.