Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 54: (H05T2A3)
Für zwei Zahlen r, R mit $0 < r < R$ bezeichne $A_{r,R} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ den Kreisring. Zu $a, b \in \mathbb{C}\backslash A_{r,R}$ betrachte man die holomorphe Funktion

$$\begin{aligned} f : A_{r,R} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{z-b}{z-a} \end{aligned}$$

Ein holomorpher Logarithmus zu f ist eine holomorphe Funktion $l : A_{r,R} \to \mathbb{C}$, die der Gleichung $\exp \circ l = f$ genügt. Zeigen Sie, daß genau dann ein holomorpher Logarithmus zu f existiert, wenn a und b in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\backslash A_{r,R}$ liegen.

Aufgabe 55: (H01T1A5)

a) Man konstruiere eine biholomorphe Abbildung der längs der negativen reellen Achse geschlitzten Ebene

$$G := \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) = 0, \mathrm{Re}\,(z) \leq 0\}$$

auf den Einheitskreis.

b) Es sei $\phi : G \to \mathbb{E}$ eine beliebige biholomorphe Abbildung von G auf den Einheitskreis. Man zeige: Es gibt einen (von ϕ abhängigen) Punkt $p \in \partial\mathbb{E}$ auf dem Rand des Einheitskreises, so daß für jede reelle Zahl $\alpha \in]-\pi, \pi[$ gilt:

$$\lim_{r\to\infty} \phi\left(re^{i\alpha}\right) = p$$

Aufgabe 56: (H04T1A5)
Unter welchen Bedingungen an $a \in \mathbb{C}$ bildet die durch $f(z) = \dfrac{z-a}{z+a}$ definierte Möbiustransformation f die rechte Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$ biholomorph auf den Einheitskreis $\mathbb{E} = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ ab? Gibt es außer der angegebenen noch weitere Möbiustransformationen f, die die Bedingungen $f(H) = \mathbb{E}$ und $f(a) = 0$ erfüllen?

Aufgabe 57: (H05T3A4) Es sei Log der Hauptzweig des Logarithmus.

a) Zeigen Sie, daß Log die offene rechte Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$ biholomorph auf den offenen Streifen $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Im}\,(z) < \frac{\pi}{2}\}$ abbildet?

b) Bestimmen Sie eine biholomorphe Abbildung $\psi_0 : U \to \mathbb{D}$, die den offenen Streifen $U := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}\,(z) < 1\}$ auf den offenen Einheitskreis $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ abbildet.

c) Zeigen sie, daß die Menge aller biholomorphen Abbildungen ψ von U auf $\mathbb{D}$ von der Form $\psi = h \circ \psi_0$ sind, wobei h eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{D}$ auf sich ist.

d) Bestimmen Sie alle biholomorphen Abbildungen ϕ von U auf $\mathbb{D}$, für die $\phi(\frac{1}{2}) = 0$ und $\lim_{y\to\infty} \phi(x+iy) = 1$ für $x \in]0,1[$ gilt.

Aufgabe 58: (H13T2A1)
Betrachten Sie das Gebiet

$$G := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \left| z - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2} \right\}.$$

Geben Sie eine biholomorphe Abbildung von G auf die Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} := \{ w \in \mathbb{C} : |w| < 1 \}$$

an. Hinweis: Bilden Sie zunächst G mit einer Möbiustransformation auf den Streifen $S := \{ z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi \}$ ab und nutzen Sie dann die Exponentialfunktion.