Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 49: (H17T1A2)

a) Bestimmen Sie die Ordnung der Nullstelle $z_0 = 0$ der Funktion

$$f(z) := 6\sin(z^3) + z^3(z^6 - 6).$$

b) Sei $b > 0$. Zeigen Sie, daß gilt:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.$$

Sie dürfen ohne Beweis benutzen, daß $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie für $R > 0$ das Kurvenintegral $\int\limits_{\gamma_R} e^{-x^2}dx$, wobei γ_R der Rand des Rechtecks mit den Eckpunkten $\pm R + 0i$ und $\pm R + ib$ ist.

Aufgabe 50: (F04T1A3) Beweisen Sie, daß für jedes $\alpha \in [-1, 1]$ das Polynom

$$p_\alpha(z) = z^6 + i\alpha z + 1$$

in der oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ genau drei Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) hat.

Aufgabe 51: (H07T1A1) Es sei a eine reelle Zahl mit $a > 1$. Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$ze^{a-z} = 1$$

im Einheitskreis $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ genau eine Lösung z_0 hat, und daß diese reell ist mit $0 < z_0 < 1$.

Aufgabe 52: (F11T1A4)
Gegeben sei die Funktion $\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{z^2 + 2z + 2} \end{aligned}$ mit maximaler Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, daß das Integral der Funktion f über die positiv orientierte Kreislinie um 0 mit Radius 3 verschwindet.

b) Zeigen Sie mit oder ohne Hilfe von (a), daß f auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ eine komplexe Stammfunktion hat. (Diese braucht nicht unbedingt ausgerechnet zu werden.)

Aufgabe 53: (F14T2A4)

Es sei $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C}\backslash\{-1,1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z^2}{z^2-1} \end{array}$.

a) Bestimmen Sie für jede der Singularitäten von f den Typ und berechnen Sie das Residuum.

b) Zeigen Sie , daß für $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ die Einschränkung $\begin{array}{rcl} f_U : U & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z^2}{z^2-1} \end{array}$

eine holomorphe Stammfunktion besitzt.