Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 44: (H09T3A1)

a) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_\gamma z dz$$

wobei γ den in der oberen Halbebene gelegenen Rand der im Ursprung zentrierten Ellipse mit großer Halbachse $a = 2$ längs der reellen Achse und kleiner Halbachse $b = 1$ längs der imaginären Achse von 2 nach -2 durch die obere Halbebene durchläuft.

b) Welchen Wert hat obiges Integral, falls der Weg auf dem Ellipsenrand durch die untere Halbebene gewählt wird?

Aufgabe 45: (H01T3A3) Es sei $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ für alle $z \in G$. Zeigen Sie, daß f injektiv ist.
Aufgabe 46: (H04T2A1) Beweisen Sie die beiden Gleichheiten:

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2}$$

b) $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos(t)} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Aufgabe 47: (H09T3A3) Berechnen Sie unter Verwendung eines Integrationsweges, der von 0 über R über $Re^{i\frac{2\pi}{3}}$ zurück nach 0 verläuft, das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^3}$$

Aufgabe 48: (H17T3A2)
Betrachten Sie die Sinus-Cardinalis-Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

a) Zeigen Sie, daß f zu einer ganzen Funktion fortgestezt werden kann.

b) Zeigen Sie, daß die fortgesetzte Funktion über $\mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht absolut integrierbar ist.