Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 39: (H06T3A3) Gegeben sei die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$

a) Bestimmen Sie die Laurententwicklung von f auf $A := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$ und $B := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-2| < 1\}$.

b) Berechnen Sie für $\begin{array}{rcl} \gamma : [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 3e^{2\pi i t} \end{array}$ das Integral $\int\limits_\gamma f(z)dz$.

Aufgabe 40: (F09T2A5) Bestimmen Sie Formeln zur rekursiven Berechnung der Koeffizienten der Laurentreihe um $z = 0$ für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

und berechnen Sie die ersten drei Koeffizienten (die von $z^{-1}, 1, z$) explizit.

Aufgabe 41: (F11T1A5) Gegeben sei die Funktion $\begin{array}{rcl} g : D & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z}{\sin(z^2 - 4z)} \end{array}$ mit maximaler Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{C}$.

a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten der Funktion g sowie jeweils deren Typ (hebbar? Polstelle wievielter Ordnung? wesentlich?).

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) den Konvergenzradius der Potenzreihe für g um den Punkt 0. (Diese Formulierung gibt auch einen kleinen Hinweis für (a).)

Aufgabe 42: (H11T3A4) Sei $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{-i, i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{iz}(z^2+1)^{-2} \end{array}$

a) Bestimmen Sie den Typ der isolierten Singularitäten i und $-i$ der Funktion f und geben Sie das zugehörige Residuum an.

b) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(x)(x^2+1)^{-2}dx$.

Aufgabe 43: (F18T3A5)

a) Sei $a \in \mathbb{C}$. Die Funktion f sei auf $\mathbb{C}\backslash\{a\}$ holomorph und habe bei a eine wesentliche Singularität. Sei außerdem g eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Beweisen Sie folgende Aussage: Falls $g(a) \neq 0$, so hat die Produktfunktion $h = fg$ bei a eine wesentliche Singularität.

b) Seien a und f wie im Aufgabenteil (a) und $g = (z-a)^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, daß die Produktfunktion $h = fg$ in a eine wesentliche Singularität besitzt.

c) Seien a und f wie in Aufgabenteil (a), g sei auf $\mathbb{C}$ meromorph. Beweisen Sie folgende Aussage: Die Produktfunktion $h = fg$ ist auf $\mathbb{C}$ genau dann meromorph, wenn $g \equiv 0$.