Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin Wintersemester 2020/21

Mathematik III für Physiker
9. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Beispiel zur Auflösung eines Gleichungssystems
Man weise nach, dass sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - u^2 - v &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v^2 &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

für $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$ in einer Umgebung von $(1/2, 0, 1/2, 0)$ nach den Variablen $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ auflösen lässt. Das heißt, es gibt zwei Umgebungen U und V von $(1/2, 0)$ und eine Abbildung $g : U \to V$ mit $g(1/2, 0) = (1/2, 0)$, so dass

$$(x, y, g(x, y)) \text{ das Gleichungssystem (1) löst für alle } (x, y) \in U.$$

Zudem zeige man, dass g stetig differenzierbar ist, und gebe eine allgemeine Formel für die Jacobi-Matrix von g an. Kann $Dg(1)$ explizit berechnet werden?

Aufgabe 2: Beispiel zur Maximierung einer Funktion
Für $\alpha, \beta > 0$ zeige man, dass die lineare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := \alpha x + \beta y$ auf der Ellipse

$$E_{a,b}(r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x/a)^2 + (y/b)^2 \le r^2\}$$

zu den Parametern $a, b, r > 0$ eine eindeutige Maximumsstelle (x_0, y_0) besitzt, und bestimmme diese explizit. Zudem berechne man das Maximum $f(x_0, y_0)$ von f auf $E_{a,b}(r)$.

Aufgabe 3: Nutzenmaximierung in der Mikroökonomie
Für $\alpha, \beta > 0$ und $a, b, c > 0$ beweise man, dass die Potenzfunktion $u : [0, \infty[^2 \to [0, \infty[$ gegeben durch $u(x, y) := x^\alpha y^\beta$ auf dem Dreieck

$$\Delta_{a,b,c} := \{(x, y) \in [0, \infty[^2 \,|\, ax + by \le c\}$$

genau eine Maximumsstelle (x_0, y_0) hat, die auf dem Rand des Dreiecks liegt. Dabei gebe man (x_0, y_0) und $u(x_0, y_0)$ explizit an. In der Mikroökonomie wird u als Cobb-Douglas Nutzenfunktion bezeichnet und $\Delta_{a,b,c}$ als Budgetbeschränkung interpretiert.

Aufgabe 4: Ein hinreichendes Kriterium für ein globales Minimum
Es seien $d \in \mathbb{N}$ und U eine offene und sternförmige Menge in $\mathbb{R}^d$ mit Sternmittelpunkt a. Für eine zweimal differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, dessen Hesse-Matrix $D^2 f$ stets positiv semi-definit ist, beweise man

$$f(x) \ge f(a) + Df(a)(x - a) \quad \text{für alle } x \in U.$$

Zudem folgere man: Ist a ein kritischer Punkt von f, so besitzt f ein globales Minimum in a.