



Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin

Wintersemester 2020/21

## Mathematik III für Physiker

### 8. Tutoriumsblatt

Im Folgenden seien stets  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq b$ .

#### Aufgabe 1: Die Länge des Graphen einer Funktion

Für  $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  betrachten wir die Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch  $\gamma(t) := (t, f(t))$ , die den Graphen  $\Gamma(f)$  von  $f$  im folgenden Sinne parametrisiert:

$$\Gamma(f) = \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\} = \gamma([a, b]).$$

- (a) Man weise nach, dass  $\gamma$  rektifizierbar ist, und finde eine allgemeine Formel für die Länge  $L(\gamma)$  der Kurve  $\gamma$ , mit der man Länge von  $\Gamma(f)$  erhält.
- (b) Indem man verwende, dass die Wurzelfunktion subadditiv ist und damit  $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$  für alle  $x, y \geq 0$  erfüllt, folgere man, dass

$$\max \left\{ b - a, \int_a^b |f'(t)| dt \right\} \leq L(\gamma) \leq b - a + \int_a^b |f'(t)| dt.$$

#### Aufgabe 2: Beispiele zur Berechnung der Länge von Graphen

Man rechne die Länge der Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) := (t, f(t))$  für die beiden folgenden Wahlen der Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  aus:

- (a)  $f(t) = \cosh(t)$  für jedes  $t \in [a, b]$ .
- (b)  $f(t) = (\alpha/2)t^2$  für alle  $t \in [a, b]$  mit  $\alpha > 0$ .

#### Aufgabe 3: Die Länge einer rotierenden Kurve

Für  $r, \varphi \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  sei die Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$\gamma(t) := r(t)(\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t))).$$

- (a) Man zeige wie in Aufgabe 1, dass die Kurve  $\gamma$  rektifizierbar ist, und gebe eine allgemeine Formel für  $L(\gamma)$  an.
- (b) Mithilfe der Subadditivität der Wurzelfunktion und der Formel aus (a) leite man nun a priori Abschätzungen für  $L(\gamma)$  her.

#### Aufgabe 4: Die Länge eines Teilstücks eines Kreisbogens

Es seien  $\alpha \in [-1, 1]^2$  mit  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  und  $r > 0$ . In dieser Aufgabe soll die Länge des Teilstücks

$$T^\alpha(r) := \{(x, y) \in [\alpha_1 r, \alpha_2 r] \times [0, r] \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

des Kreisbogens  $\mathbb{S}^1(r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$  bestimmt werden.

- (a) Man finde  $\hat{\alpha} \in [0, \pi]^2$  mit  $\hat{\alpha}_1 \geq \hat{\alpha}_2$ , so dass  $T^\alpha(r) = \gamma([\hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_1])$  für die surjektive Abbildung  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{S}^1(r)$  definiert durch  $\gamma(t) := r(\cos(t), \sin(t))$  gilt.
- (b) Mit der allgemeinen Formel für  $L(\gamma)$  aus Aufgabe 3 berechne man die Länge von  $T^\alpha(r)$ . Welchen Wert erhält man für  $\alpha_1 = -1$  und  $\alpha_2 = 0$ ?