Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin Wintersemester 2020/21

Mathematik III für Physiker
7. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Die Taylorpolynome des Arkustangens um den Ursprung
Wir betrachten die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ der Tangensfunktion.

(a) Man konstruiere eine Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Polynomfunktionen rekursiv, so dass

$$\arctan^{(k)}(x) = \frac{p_k(x)}{(1+x^2)^k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } x \in \mathbb{R}.$$

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bestimme man das $(2n-1)$-te Taylorpolynom T_{2n-1} von arctan im Ursprung, gegeben als reellwertige Polynomfunktion durch

$$T_{2n-1}(h) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{k!} \arctan^{(k)}(0) h^k \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R}.$$

Dabei darf verwendet werden, dass $p_{2k-1}(0) = (-1)^{k-1}(2k-2)!$ und $p_{2k}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Aufgabe 2: Die Binomialreihe als Taylorreihe einer Potenzfunktion
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und jedes $k \in \mathbb{N}_0$ benutzen wir im Folgenden den erweiterten Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{\alpha+1-i}{i}$. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, die Binomialreihendarstellung

$$(1+h)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} h^k \quad \text{für alle } h \in]-1,1[\tag{1}$$

im Falle $\alpha > -1$ mithilfe der Potenzfunktion $\varphi_\alpha :]0,\infty[\to]0,\infty[$ gegeben durch $\varphi_\alpha(x) := x^\alpha$ herzuleiten. Dazu gehen wir wie folgt vor.

(a) Man finde eine Formel für $\varphi_\alpha^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, die man per Induktion beweise.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gebe man das n-te Taylorpolynom $T_{n,a}$ von φ_α in einem Punkt $a > 0$ an, das als reellwertige Polynomfunktion definiert wird durch

$$T_{n,a}(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi_\alpha^{(k)}(a)}{k!} h^k \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R}.$$

(c) Für $\alpha > -1$ beweise man, dass $(\varphi_\alpha^{(k)}(1)/k!)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, und folgere (1) aus dem Satz von Taylor, der Formel von Cauchy-Hadamard und einer Restgliedabschätzung.

Aufgabe 3: Der geometrische Mittelpunkt eines runden Körpers

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to [0, \infty[$ eine Borel-messbare Funktion.

(a) Man berechne das Volumen des Körpers $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times [a, b] \mid x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}$.

(b) Unter welcher Annahme an die Funktion f ist folgende Bedingung erfüllt:

$$\lambda_3(K) \in]0, \infty[\quad \text{und} \quad \int_K \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, d\lambda_3(x, y, z) < \infty. \tag{2}$$

(c) In dem Fall, dass (2) gilt, bestimme man den geometrischen Mittelpunkt $c(K)$ von K.