



Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin

Wintersemester 2020/21

## Mathematik III für Physiker

### 5. Tutoriumsblatt

#### Aufgabe 1: Beispiele zu Grenzwerten von Integralfolgen

Man zeige, dass die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimme ihre jeweiligen Werte:

a)  $\lim_{n \uparrow \infty} \int_0^\pi \sin(x)^{1/n} dx.$

b)  $\lim_{n \uparrow \infty} \int_0^1 n f(x) (1 + n^2 \sqrt{x})^{-1} dx$  für eine Borel-messbare Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , für die ein  $c > 0$  existiert, so dass  $|f(x)| \leq c\sqrt{x}$  für alle  $x \in [0, 1]$ . Kann man  $f = \sin$  wählen?

#### Aufgabe 2: Beispiele zur Auswertung von Integralen

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $n \in \mathbb{N}$  gebe man die beiden folgenden Integrale explizit an:

$$\int_a^b \frac{x^{3n-1}}{1+x^{2n}} dx \quad \text{und} \quad \int_a^b \frac{x^{3n-1}}{(1+x^{2n})^2} dx.$$

#### Aufgabe 3: Weitere Beispiele zur Auswertung von Integralen

Es seien  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha \geq 0$  und  $\beta > -1$ . Man berechne folgende Integrale explizit:

a)  $\int_1^e x^{-1} \sin(\pi \log(x)) dx.$

b)  $\int_0^1 e^{\alpha x} (\beta + e^{\alpha x})^\gamma dx.$

c)  $\int_0^1 x^{\alpha-1} (\beta + x^\alpha)^\gamma dx$  im Falle  $\beta > 0$ .

#### Aufgabe 4: Beispiel zur zweidimensionalen Lebesgue-Integrierbarkeit

Man prüfe für welche  $\beta > 0$  die Funktion  $f_\beta : ]0, 1[^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f_\beta(x, y) := \frac{x^2 - y^\beta}{(x^2 + y^\beta)^2}$$

Lebesgue-integrierbar ist. Dazu kann der Satz von Fubini hilfreich sein.