Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin Wintersemester 2020/21

Mathematik III für Physiker
4. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Beispiel einer Lebesgue-integrierbaren Funktion
Für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ berechne man das endliche Lebesgue-Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a + (x - b)^2}\, dx.$$

Aufgabe 2: Beispiele zur Bestimmung der Lebesgue-Integrierbarkeit

(a) Man prüfe für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das Lebesgue-Integral $\int_0^y x^\alpha \log(x)\, dx$ endlich ist und bestimme seinen Wert, wobei $y > 0$.

(b) Für $a > 0$ und $y \in]\sqrt{a}, \infty[$ gebe man den Wert des Integrals $\int_y^\infty \frac{1}{x^2 - a}\, dx$ an. Ist die Funktion $]\sqrt{a}, \infty[\to]0, \infty[$, $x \mapsto (x^2 - a)^{-1}$ Lebesgue-integrierbar?

Aufgabe 3: Der Flächeninhalt einer Ellipse
In dieser Aufgabe soll der Flächeninhalt, also das zweidimensionale Lebesgue-Maß, der Ellipse

$$E_{a,b}(r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq r^2\}$$

mit den Parametern $a, b, r > 0$ berechnet werden. Dazu verwenden wir das Cavalierische Prinzip, das das zweidimensionale und das eindimensionale Lebesgue-Maß wie folgt in Beziehung setzt:

$$\lambda_2(B) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(\{x \in \mathbb{R} \,|\, (x, y) \in B\})\, dy \quad \text{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

(a) Man rechtfertige, dass $E_{a,b}(r)$ eine Borelmenge ist, und leite einen Zusammenhang zwischen $\lambda_2(E_{a,b}(r))$ und dem Integral $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$ mithilfe des Cavalierischen Prinzips her.

(b) Mit einer geeigneten Substitution zur Brechnung von $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$ gebe man nun eine Formel für $\lambda_2(E_{a,b}(r))$ an.

Aufgabe 4: Das Volumen eines gekrümmten Tetraeders
Ein weiterer Spezialfall des Cavalierischen Prinzips ist folgender Zusammenhang zwischen dem dreidimensionalen und dem zweidimensonalen Lebesgue-Maß:

$$\lambda_3(B) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x, y, z) \in B\})\, dz \quad \text{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3).$$

Mit den Erkenntnissen aus der vorherigen Aufgabe und dem Cavalierischen Prinzip berechne man das Volumen, also das 3-dimensionale Lebesgue-Maß, des gekrümmten Tetraeders

$$T_{a,b,c}(r) := \{(x, y, z) \in [0, \infty[^3 \,|\, x/a + y/b + z/c \leq r\}$$

mit den Parameter $a, b, c, r > 0$.