LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin Wintersemester 2020/21

# Mathematik III für Physiker
# 3. Tutoriumsblatt

**Aufgabe 1: Erzeugte Mengenringe**
Es seien $X$ eine nicht-leere Menge, $\mathcal{E}$ ein nicht-leeres Mengensystem in $\mathcal{P}(X)$ und

$$\mathcal{F} := \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} E_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\, E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E} \right\}. \tag{1}$$

Man weise die folgenden drei Aussagen nach:

(a) $\mathcal{F}$ ist $\cup$-stabil und jeder Mengenring $\mathcal{G}$, der $\mathcal{E}$ enthält, erfüllt auch $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Ist zudem $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil, so besitzt auch $\mathcal{F}$ diese Eigenschaft.

(b) $\mathcal{E}$ sei $\cap$-stabil, $\emptyset \in \mathcal{E}$ und es gelte $E \setminus D \in \mathcal{F}$ für alle $D, E \in \mathcal{E}$ mit $D \subset E$. Dann ist $\mathcal{F}$ ein Mengenring.

(c) Ist $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil und $E \setminus D$ die endliche Vereinigung von disjunkten Mengen in $\mathcal{E}$ für alle $D, E \in \mathcal{E}$ mit $D \subset E$, so gibt es zu jedem $A \in \mathcal{F}$ ein $n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Mengen $E_1, \ldots, E_n$ in $\mathcal{E}$ mit $A = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$.

**Aufgabe 2: Existenz und Eindeutigkeit von Inhalten auf erzeugten Mengenringen**
Es seien $X$ eine nicht-leere Menge, $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiles Mengensystem in $\mathcal{P}(X)$ mit $\emptyset \in \mathcal{E}$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ definiert durch (1). Es gelte $E \setminus D \in \mathcal{F}$ für alle $D, E \in \mathcal{E}$ mit $D \subset E$.

(a) Man beweise, dass ein Inhalt $\mu$ auf $\mathcal{F}$ eindeutig durch seine Werte auf $\mathcal{E}$ bestimmt ist. Das bedeutet, ist $\nu$ ein weiterer Inhalt auf $\mathcal{F}$, der

$$\mu(E) = \nu(E) \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}$$

erfüllt, so folgt stets $\mu = \nu$.

(b) Es sei $\mu_0$ eine $[0, \infty]$-wertige Funktion auf $\mathcal{E}$ mit $\mu_0(\emptyset) = 0$, die additiv im folgenden Sinne ist: Für $n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Mengen $E_1, \ldots, E_n$ in $\mathcal{E}$ mit $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{E}$ gilt

$$\mu_0\Big( \bigcup_{i=1}^{n} E_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu_0(E_i).$$

Unter der Annahme, dass jedes $A \in \mathcal{F}$ als endliche Vereinigung paarweiser disjunkter Mengen in $\mathcal{E}$ geschrieben werden kann, zeige man, dass es genau einen Inhalt $\mu$ auf $\mathcal{F}$ gibt, der $\mu = \mu_0$ auf $\mathcal{E}$ leistet. In diesem Fall ist $\mu$ endlich, falls $\mu_0$ es ist.

**Aufgabe 3: Das Lebesguesche Prämaß**

Zu dem Mengensystem aller links halboffenen und beschränkten Interalle betrachten wir den dazugehörigen Mengenring:

$$\mathcal{F}_1 := \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} ]a_i, b_i] \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}^n \colon\ a_i \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

(a) $\mathcal{F}_1$ ist ein Mengenring über $\mathbb{R}$ und zu jedem $A \in \mathcal{F}_1$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i \leq b_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $A = \bigcup_{i=1}^{n} ]a_i, b_i]$, so dass im Falle $n \geq 2$ stets $b_i \leq a_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt.

(b) Man zeige, dass es genau einen Inhalt $\lambda_1$ auf $\mathcal{F}_1$ gibt, der $\lambda_1(]a, b]) = b - a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ erfüllt. Zudem folgere man, dass $\lambda_1$ endlich sein muss.