



Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin

Wintersemester 2020/21

Mathematik III für Physiker

2. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Das Integral als linearer monotoner Operator

Auf einem Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) weise man nach, dass das μ -Integral wie folgt als Erweiterung des Maßes μ aufgefasst werden kann:

$$\int_X \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A) \quad \text{für all } A \in \mathcal{A}.$$

Zudem beweise man die beiden folgenden Eigenschaften des μ -Integrals für $\alpha \in [0, \infty[$ und zwei \mathcal{A} -Stufenfunktionen f und g :

- (i) *Linearität*: $\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$ und $\int_X f + g d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.
- (ii) *Monotonie*: Ist $f \leq g$, gilt also $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X$, so ist $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

Aufgabe 2: Die Poisson-Verteilung

Es sei P_λ die Poisson-Verteilung zu einem Parameter $\lambda > 0$ gegeben als Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem messbaren Raum $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ durch

$$P_\lambda = e^{-\lambda} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\lambda^n}{n!} \delta_n.$$

Man beweise, dass das erste Moment $\int_{\mathbb{N}_0} n dP_\lambda(n)$ dieser Verteilung, das als P_λ -Integral der Identität $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $n \mapsto n$ aufgefasst werden kann, endlich ist und bestimme ihren Wert.

Aufgabe 3: Die geometrische Verteilung

Es bezeichne nun P_p die geometrische Verteilung zu einem Parameter $p \in]0, 1[$, die man als Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem messbaren Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ wie folgt definiert:

$$P_p = p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \delta_n.$$

- (i) Man zeige, dass dieses Maß in der Tat normiert ist, es erfüllt also $P_p(\mathbb{N}) = 1$.
- (ii) Man berechne nun das erste Moment $\int_{\mathbb{N}} n dP_p(n)$ dieser Verteilung.

Aufgabe 4: Vertauschung von Reihen und Integralen

Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Man beweise, dass für jede Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $[0, \infty[$ -wertigen \mathcal{A} -messbaren Funktionen auf X stets

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu$$

erfüllt ist.