Tutoriumsblatt 13 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 1:
Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ $\sigma-$endliche Maßräume und $k : X \times Y \to \mathbb{C}$ sei $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}-$meßbar. Es seien $p, q \in]1, \infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und

$$M_{p,1} := \int\limits_Y \left(\int\limits_X |k(x,y)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} d\nu(y) < \infty.$$

Zeige daß durch

$$(Kf)(y) := \int\limits_X k(x,y) f(x) d\mu(x)$$

eine beschränkte lineare Abbildung $\begin{array}{rcl} K : L^p(X) & \to & L^1(Y) \\ f & \mapsto & Kf \end{array}$ mit $|||K||| \leq M_{p,1}$ definiert wird.

Aufgabe 2:

a) Zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ das Integral $\int\limits_0^1 x^2(1-x)^n dx$ existiert und berechne es.

b) Es sei λ^2 das Borel-Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^2$ und $W := [-\pi, \pi] \times [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R}^2$. Zeige, daß das Integral

$$\int\limits_W xy \sin(x^2) d\lambda^2(x,y)$$

existiert und berechne es.

Aufgabe 3:
Es sei λ^2 das Borel-Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^2$. Zeige die Existenz und berechne den Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|x| e^{-x^2 - iy}}{1 + y^{2n}} d\lambda^2(x,y)$$

Aufgabe 4:
Es sei λ^2 das Borel-Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^2$ und $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$. Zeige die Existenz und berechne die Grenzwerte von

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_A (x^2 + y^2)^n d\lambda^2(x,y).$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_A (x^{2n} + y^{2n}) d\lambda^2(x,y).$