Tutoriumsblatt 12 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 1:
Zeige, daß die Funktionen $\begin{array}{rcl} f_k : [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \end{array}$, $k \in \mathbb{Z}$ ein Orthonormalsystem von $L^2([0,2\pi])$ bilden.

Aufgabe 2:
Es sei $I \neq \emptyset$ und $e_j := (e_{j,k})_{k \in I}$. Zeige, daß $e_j, j \in I$ eine Orthonormalbasis von $l^2(I)$ bildet.

Aufgabe 3: Tschebyscheff-Polynome der ersten Art
Setzt man $x = \cos\alpha$ und betrachtet $\cos(k\alpha)$ als Funktion in x, d.h. man definiert

$$T_k(x) := \cos(k \arccos x), \qquad x \in [-1,1] .$$

a) Beweise, daß diese Funktionen der Drei-Term-Rekursion

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \qquad k \geq 2$$

mit den Startwerten $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ genügen (und dadurch können wir $T_k(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definieren.)

b) Beweise, daß $T_k(x)$ ein Polynom vom Grad k ist.

c) Beweise, daß $T_k(x)$ gerade Orthogonalpolynome in $L^2([-1,1], \rho \cdot d\lambda)$, also bezüglich des Maßes, das mit dem Lebesguemaß λ die Dichte $\begin{array}{rcl} \varrho :]-1,1[& \to & [0,\infty[\\ x & \mapsto & (1-x^2)^{-1/2} \end{array}$ hat.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, T_n(x)T_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad n \neq m \\ \pi & \text{falls} \quad n = m = 0 \\ \pi/2 & \text{falls} \quad n = m \neq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3, Lösung: Die beiden ersten Polynome $T_0(x) = \cos(0) = 1$ und $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$ sind die Startwerte für die Drei-Terme-Rekursion. Da $\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ bijektiv ist, können wir $x = \cos\alpha$ für $x \in [-1,1]$ schreiben. In die Definition von T_k eingesetzt ergibt sich $T_k(\cos\alpha) = \cos(k\arccos(\cos\alpha)) = \cos(k\alpha)$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Zur Vereinfachung von $2xT_k(x) - T_{k-1}(x) = 2\cos\alpha\cos(k\alpha) - \cos((k-1)\alpha)$ verwenden wir das Additionstheorem

$$\cos\beta + \cos\gamma = 2\cos(\frac{\beta+\gamma}{2})\cos(\frac{\beta-\gamma}{2})$$

für den Kosinus und erhalten damit:

$$2xT_k(x) - T_{k-1}(x) = 2\cos\alpha\cos(k\alpha) - \cos((k-1)\alpha) = \cos((k+1)\alpha) = T_{k+1}(x),$$

was die Drei-Terme-Rekursion für T_k auf $[-1,1]$ zeigt.
T_k, $k \geq 0$ ist ein Polynom vom Grad k; der führende Koeffizient ist 2^{k-1} für $k \geq 1$. Dies ist für $k = 0,1$ aus $T_0(x) = 1$ und $T_1(x) = x$ offensichtlich. Gilt diese Aussage aber für $k \leq n$, so folgt aus der Drei-Terme-Rekursion:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) = 2x(2^{n-1}x^n + q_{n-1}(x)) - T_{n-1}(x) = \\ &= 2^n x^{n+1} + (2xq_{n-1}(x) - T_{n-1}(x)) \end{aligned}$$

mit einem Polynom q_{n-1} vom Grad $n-1$.
Mit der Substitution $x = \cos\alpha$ geht $T_n(x)$ über in $\cos(n\alpha)$ und $dx = -\sin\alpha d\alpha$. Damit berechnet sich

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx &= -\int_{\pi}^{0} \cos(n\alpha)\cos(m\alpha)\frac{\sin(\alpha)d\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha^2}} = -\int_{\pi}^{0} \cos(n\alpha)\cos(m\alpha)\frac{\sin(\alpha)d\alpha}{\sin(\alpha)} = \\ &= \int_{0}^{\pi} \cos(n\alpha)\cos(m\alpha)d\alpha = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\alpha)\cos(m\alpha)d\alpha = \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n+m)\alpha) + \cos(n-m)\alpha))d\alpha = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4}\left[\frac{\sin((n+m)\alpha)}{n+m} + \frac{\sin((n-m)\alpha)}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{falls } n \neq m \\ \pi & \text{falls } n = m = 0 \\ \frac{1}{4}\left[\frac{\sin((n+m)\alpha)}{n+m} + \alpha\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2} & \text{falls } n = m \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$