Tutoriumsblatt 11 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 1:
Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ $\sigma-$endliche Maßräume, $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^2(\nu)$. Zeige, daß

$$\begin{array}{rcl} h : X \times Y & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & f(x)g(y) \end{array} \quad \in \mathcal{L}^2(\mu \otimes \nu)$$

ist.

Aufgabe 2: Zeige:

a) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \lim\limits_{\|x\| \to \infty} x^\alpha (\partial^\beta f)(x) = 0 \text{ für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d\}$

b) $\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2} \end{array} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 3: Zeige:

a) Für $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ sind $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{(a^2 + x^2)^n} \end{array}$ und $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{(a^2 + x^2)^n} \end{array}$

Lebesgue-integrierbar.

b) Für $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2d + 2$ gilt $\begin{array}{rcl} \langle \cdot \rangle^s : \mathbb{R}^d & \to & [0, \infty[\\ (x_1, ..., x_d) & \mapsto & \left(\sqrt{1 + x_1^2 + ... + x_d^2}\right)^{-s} \end{array} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.