Tutoriumsblatt 10 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 1:
Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ $\sigma-$endliche Maßräume und $k : X \times Y \to \mathbb{C}$ sei $\mu \otimes \nu-$meßbar und $M_{1,1} := \sup_{x \in X} \int_Y |k(x,y)| d\nu(y) < \infty$. Zeige daß durch

$$\begin{aligned} L : L^1(X) &\to L^1(Y) \\ f &\mapsto \int_X k(x,\cdot) f(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

eine beschränkte lineare Abbildung mit $|||L||| \leq M_{1,1}$ definiert wird.

Aufgabe 2:
Es sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^3$, λ^3 das Borel-Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^3$ und zu $R > 0$ sei

$$\begin{aligned} V_R : \mathbb{R}^3 &\to [-\infty, 0] \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } \|x\| > R \\ -\frac{1}{\|x\|} & \text{für } 0 < \|x\| \leq R \\ -\infty & \text{für } \|x\| = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Zeige:

a) $V_R \in L^2(\mathbb{R}^3, \lambda^3)$.

b) $V_R \notin L^\infty(\mathbb{R}^3, \lambda^3)$.

Aufgabe 3:
Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ und

$$\begin{aligned} L : [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (t, (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3)) &\mapsto \frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \end{aligned}$$

a) Bestimme die Euler-Lagrange Gleichungen, die jedes lokale Extremum $\lambda \in C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^3)$ von

$$\begin{aligned} f : C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^3) &\to \mathbb{R} \\ \mu &\mapsto \int_\alpha^\beta L(t, \mu(t), \mu'(t)) dt \end{aligned}$$

erfüllt.

b) Wie lautet die physikalische Interpretation von (a)?