Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin Wintersemester 2020/21

Mathematik III für Physiker
1. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Darstellungen von Intervallen mittels rationaler Zahlen
Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ zeige man, dass

$$]a,b[= \bigcup_{\substack{p,q\in\mathbb{Q}:\\ a<p\leq q<b}}]p,q] = \bigcup_{\substack{p,q\in\mathbb{Q}:\\ a<p\leq q<b}} [p,q].$$

Aufgabe 2: Darstellung von Maßen auf abzählbaren Mengen
Es sei X eine nicht-leere abzählbare Menge. Man leite her, dass jedes Maß μ auf $(X, \mathcal{P}(X))$ die Darstellung

$$\mu = \sum_{x\in X} \mu(\{x\})\delta_x$$

annimmt. Daraus folgere man, dass das Zählmaß ν auf X, gegeben durch $\nu(A) = |A|$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)$, von der Form $\nu = \sum_{x\in X} \delta_x$ ist.

Aufgabe 3: Unterscheidung von Mengen nach der Mächtigkeit
Es sei X eine nicht-leere überabzählbare Menge.

(a) Man zeige, dass das Mengensystem $\mathcal{A}$ bestehend aus allen Teilmengen A von X, so dass A oder A^c abzählbar ist, eine σ-Algebra darstellt.

(b) Man weise nun nach, dass $\mu : \mathcal{A} \to [0, 1]$ definiert durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar,} \\ 1 & \text{falls } A^c \text{ abzählbar} \end{cases}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(X, \mathcal{A})$ ist.

Aufgabe 4: Ein Mengensystem mit ungeraden natürlichen Zahlen
Sei $\mathcal{E}$ das Mengensystem bestehend aus allen Mengen der Form $\{1, \ldots, 2n - 1\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(a) Wir setzen $V_1 := \{1\}$ und $V_n := \{2n - 2, 2n - 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Man zeige, dass die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra auf $\mathbb{N}$ die Gestalt

$$\sigma(\mathcal{E}) = \left\{ \bigcup_{i\in I} V_i \,\middle|\, I \subset \mathbb{N} \right\}$$

annimmt.

(b) Für $\lambda > 0$ weise man nach, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{N}, \sigma(\mathcal{E}))$ durch

$$\mu(A) := e^{-\lambda} \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}:\\ A\cap V_n\neq\emptyset}} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

definiert wird.