



Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin

Wintersemester 2020/21

Mathematik III für Physiker

9. Übungsblatt

Aufgabe 25: Invarianz der Kurvenlänge unter Reparametrisierung (10 Punkte)

Es seien I und J zwei kompakte Intervalle, $\varphi : I \rightarrow J$ eine stetige, streng monoton steigende, surjektive Funktion, X ein Banachraum, und $\gamma : J \rightarrow X$ eine stetige Abbildung.

- (a) Man weise nach, dass $\text{Var}(\gamma \circ \varphi, I) \leq \text{Var}(\gamma, J)$ für die Variation der X -wertigen stetigen Abbildung $\gamma \circ \varphi$ auf I gilt.
- (b) Aus (a) folgere man: Für die reparametrisierte Abbildung $\gamma \circ \varphi$ gilt stets

$$\text{Var}(\gamma \circ \varphi, I) = \text{Var}(\gamma, J).$$

Insbesondere ist $\gamma \circ \varphi$ genau dann rektifizierbar, wenn γ diese Eigenschaft erfüllt.

Aufgabe 26: Beispiel zur Auflösung eines Gleichungssystems (10 Punkte)

Man beweise, dass sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x^3 + \sin^2(y) + xz &= 2 \\ xy^2 + yz^2 + x \cos(y) &= 1\end{aligned}\tag{1}$$

für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ in einer Umgebung von $(1, 0, 1)$ eindeutig nach den Variablen $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ auflösen lässt. Das heißt, es gibt eine Umgebung U von 1 , eine Umgebung V von $(0, 1)$ und eine eindeutige Abbildung $g : U \rightarrow V$ mit $g(1) = (0, 1)$, so dass ein Punkt

$$(x, y, z) \in U \times V \text{ genau dann das Gleichungssystem (1) löst, wenn } (y, z) = g(x).$$

Zudem zeige man, dass g unendlich oft differenzierbar ist, gebe eine allgemeine Formel für die Ableitung von g an und berechne $g'(1)$ explizit.

Aufgabe 27: Beispiel zur Maximierung einer Funktion (15 Punkte)

Für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ sei die quadratische Polynomfunktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := x^2 + y^2 + ay + b$$

und für $c \in]0, a]$ bezeichne D die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $cy \geq -x^2$. Man prüfe, ob f auf D ein Minimum annimmt, und bestimme dabei die Menge

$$\arg \min_{(x,y) \in D} f(x, y).$$