LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin Wintersemester 2020/21

Mathematik III für Physiker
7. Übungsblatt

Aufgabe 19: Beispiel einer glatten, aber nicht analytischen Funktion *(10 Punkte)*

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei die Funktion $\varphi_n : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ definiert durch

$$\varphi_n(x) := \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} \quad \text{für } x > 0 \quad \text{und} \quad \varphi_n(x) := 0 \quad \text{für } x \leq 0.$$

a) Man begründe, dass φ_n unendlich oft differenzierbar auf $]0, \infty[$ ist, und zeige, dass es eine Folge $(p_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ von Polynomfunktionen gibt, so dass

$$p_k(0) = 1 \quad \text{und} \quad \varphi_n^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{p_k(x)}{x^{2k}} \varphi_n(x)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und jedes $x > 0$.

b) Man zeige, dass $\lim_{x \downarrow 0} \varphi_n(x) = 0$, und folgere damit aus aus (a), dass φ_n eine unendlich oft differenzierbare Funktion ist.

c) Mit den Erkenntnissen aus (a) und (b) beweise man, dass φ_n in keiner Umgebung um den Nullpunkt durch ihre Taylorreihe dargestellt wird.

Aufgabe 20: Minimierung einer konvexen Funktion *(10 Punkte)*

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Für $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$ bezeichnet $\arg\min_{x \in D} f(x)$ die Menge aller globalen Minima von f. In dieser Aufgabe soll die Menge

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\arg\min} \, |Ax - b| \tag{1}$$

mit analytischen Methoden bestimmt werden. Dabei steht $|\cdot|$ für die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^m$.

a) Man leite die Menge S_f aller stationären Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ definiert durch $f(x) := |Ax - b|^2$ her.

b) Als Nächstes gebe man die Hesse-Matrix H_f von f an und zeige, dass H_f in jedem Punkt positiv semi-definit ist, woraus die Konvexität von f folgt.

c) Nun bestimme man die Menge (1), indem man verwende dass jedes lokale Minimum einer reellwertigen konvexen Funktion auf $\mathbb{R}^n$ stets global ist.

d) Schließlich gebe man eine äquivalente Bedingung dazu an, dass die Menge (1) aus genau einem Punkt besteht.

Aufgabe 21: Der geometrische Mittelpunkt eines Kegels *(15 Punkte)*

Für $n \in \mathbb{N}$, eine Borelmenge B in $\mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{R}^{n+1}$, so dass $\lambda_n(B) \in]0, \infty[$, $\int_B |x| \, dx < \infty$ und $p_{n+1} \neq 0$, betrachten wir den Kegel C mit Grundfläche B und Spitze p:

$$C = \{(1-t)(x_1, \ldots, x_n, 0) + tp \,|\, x \in B, \, t \in [0,1]\}.$$

Man beweise, dass $\int_C |y| \, dy < \infty$, und bestimme $t_n \in]0, 1[$ explizit, so dass

$$c(C) = (1-t_n)(c_1(B), \ldots, c_n(B), 0) + t_n p.$$