



Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin

Wintersemester 2020/21

## Mathematik III für Physiker

### 4. Übungsblatt

#### Aufgabe 10: Beispiel einer Integralfunktion

(10 Punkte)

Im Folgenden bezeichne  $\lambda$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}$ .

- (a) Man zeige, dass die Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) := \frac{x}{(1+x^2)^2}$  Lebesgue-integrierbar auf  $[0, \infty[$  ist. Das heißt,  $g\mathbf{1}_{[0, \infty[}$  ist  $\lambda$ -integrierbar.
- (b) Für eine Borel-messbare Lebesgue-integrierbare Funktion  $h : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  beweise man, dass die Funktion

$$[0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \mapsto \int_0^\infty e^{-ax} h(x) dx$$

wohldefiniert und stetig ist, um damit den Grenzwert  $\lim_{a \downarrow 0} \int_0^\infty e^{-ax} h(x) dx$  herzuleiten.

- (c) Man berechne nun  $\lim_{a \downarrow 0} \int_0^\infty e^{-ax} g(x) dx$ .

#### Aufgabe 11: Beispiel einer Hilbertraum-wertigen Abbildung

(10 Punkte)

Es bezeichne  $l^2(\mathbb{N})$  den separablen Hilbertraum aller komplexen Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die  $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty$  erfüllen, ausgestattet mit dem Skalarprodukt definiert durch

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^\infty \overline{x_n} y_n.$$

Mit der von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induzierten Norm gegeben durch  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  stellt  $l^2(\mathbb{N})$  insbesondere einen separablen Banachraum dar. Wir betrachten im Folgenden die Abbildung  $f : [-1, 1] \rightarrow l^2(\mathbb{N})$  gegeben durch

$$f(x) := (2^{-n} |x| \sqrt{1-x^2})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Also, für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist die  $n$ -te Koordinatenfunktion  $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$  von der Form  $f_n(x) = 2^{-n} |x| \sqrt{1-x^2}$  für alle  $x \in [-1, 1]$ .

- (a) Man weise nach, dass  $f$  in der Tat all seine Werte in  $l^2(\mathbb{N})$  annimmt. Es gilt demnach  $f(x) \in l^2(\mathbb{N})$  für jegliches  $x \in [-1, 1]$ .
- (b) Indem man für alle  $n \in \mathbb{N}$  zeige, dass  $f_n$  Borel-messbar und die  $n$ -te Projektionsabbildung  $\pi_n : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x_n$  Lipschitz-stetig ist, folgere man die  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))$ -Messbarkeit von  $f$  (woraus wegen Separabilität von  $l^2(\mathbb{N})$  die  $\lambda$ -Meßbarkeit folgt. Zeige ebenso direkt, dass  $f$   $\lambda$ -meßbar ist.

(c) Man beweise, dass  $f$  Lebesgue-integrierbar ist, und bestimme das Bochner-Integral

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \in l^2(\mathbb{N})$$

koordinatenweise. Dazu kann die Abschätzung  $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ , die für jede reelle Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$  gültig ist, hilfreich sein.

### Aufgabe 12: Konstruktion von Maßen auf metrischen Räumen (15 Punkte)

Es seien  $(X, d)$  ein separabler metrischer Raum und  $\alpha > 0$ . Der Durchmesser einer nicht-leeren Menge  $A$  in  $X$  wird definiert durch

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} \in [0, \infty]$$

mit der Konvention  $\text{diam}(\emptyset) := 0$ . Zudem bezeichne  $\mathcal{U}(A)$  das Mengensystem aller Folgen  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von offenen Mengen in  $X$ , die  $A$  überdecken, also  $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$  leisten.

(a) Für  $\varepsilon > 0$  weise man nach, dass die Funktion  $\mu_{\alpha, \varepsilon} : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  definiert durch

$$\mu_{\alpha, \varepsilon}(A) := \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_n)^\alpha \mid U \in \mathcal{U}(A): \text{diam}(U_n) < \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}$$

ein äußeres Maß auf  $X$  ist, und charakterisiere dabei alle Mengen  $A$  in  $X$  mit  $\mu_{\alpha, \varepsilon}(A) < \infty$ .

(b) Man zeige, dass der Grenzwert  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_{\alpha, \varepsilon}(A)$  für alle  $A \in \mathcal{P}(X)$  existiert und die Funktion  $\mu_\alpha : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  definiert durch

$$\mu_\alpha(A) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_{\alpha, \varepsilon}(A)$$

ein weiteres äußeres Maß auf  $X$  darstellt.