Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin Wintersemester 2020/21

Mathematik III für Physiker
2. Übungsblatt

Aufgabe 4: Konstruktion absolut stetiger Maße *(10 Punkte)*

Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und f eine $[0, \infty]$-wertige $\mathcal{A}$-messbare Funktion auf X. Mithilfe der Definition

$$\int_A f \, d\mu := \int_X f \mathbb{1}_A \, d\mu \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}$$

zeige man, dass die Funktion $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu$$

ein weiteres Maß auf $(X, \mathcal{A})$ ist, das absolut stetig bezüglich μ im folgenden Sinne ist: Für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ folgt $\nu(A) = 0$. In Worten, jede μ-Nullmenge ist eine ν-Nullmenge.

Aufgabe 5: Unendliche Reihen von Maßen *(10 Punkte)*

Für eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Maßen auf einem messbaren Raum $(X, \mathcal{A})$ zeige man die folgenden Aussagen:

(a) Die Funktion $\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$, die punktweise durch $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ definiert wird, stellt ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$ dar.

(b) Für jede $\mathcal{A}$-messbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ gilt:

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f \, d\mu_n.$$

Aufgabe 6: Unterscheidung von Mengen nach der Mächtigkeit II *(15 Punkte)*

Es sei X eine überabzählbare Menge und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra aller Mengen A in X, so dass A oder A^c abzählbar ist.

(a) Man zeige, dass eine Funktion $f : X \to [0, \infty]$ genau dann $\mathcal{A}$-messbar ist, wenn es eine überabzählbare Menge $A_f \in \mathcal{A}$ gibt, so dass f auf A_f konstant ist.

(b) Für $\alpha \in]0, \infty[$ weise man nach, dass $\mu_\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty[$ gegeben durch

$$\mu_\alpha(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar,} \\ \alpha & \text{falls } A^c \text{ abzählbar} \end{cases}$$

ein endliches Maß auf $(X, \mathcal{A})$ ist, so dass jede $[0, \infty[$-wertige $\mathcal{A}$-messbare Funktion f auf X stets μ_α-integrierbar ist. Zudem werte man $\int_X f \, d\mu_\alpha$ explizit aus.