Ferienblatt zu Mathematik III für Physiker

Wiederholung:

Aufgabe 34: (10 Punkte)

Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ $\sigma-$endliche Maßräume und $k : X \times Y \to \mathbb{C}$ sei $\mu \otimes \nu-$meßbar.

a) Es sei $M_{1,\infty} := \sup\limits_{x\in X, y\in Y} |k(x,y)| < \infty$; zeige daß durch

$$\begin{array}{rcl} K : L^1(X) & \to & L^\infty(Y) \\ f & \mapsto & \int\limits_X k(x,\cdot)f(x)d\mu(x) \end{array}$$

eine beschränkte lineare Abbildung mit $|||K||| \leq M_{1,\infty}$ definiert wird.

b) Es sei $M_{1,1} := \sup\limits_{x\in X} \int\limits_Y |k(x,y)|d\nu(y) < \infty$; zeige daß durch

$$\begin{array}{rcl} L : L^1(X) & \to & L^1(Y) \\ f & \mapsto & \int\limits_X k(x,\cdot)f(x)d\mu(x) \end{array}$$

eine beschränkte lineare Abbildung mit $|||L||| \leq M_{1,1}$ definiert wird.

Aufgabe 35: (10 Punkte)

Es sei λ^2 das Borel-Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^2$. Zeige die Existenz und berechne den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|x|e^{-x^2-iy}}{1+y^{2n}} d\lambda^2(x,y)$$

Aufgabe 36: (10 Punkte)

Zeige, daß es ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und zwei stetig differenzierbare Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : I \to R$ mit $f(0) = g(0) = 0$ gibt, so daß

$$\begin{array}{rcl} -x^3 + (f(x))^3 + \sin(g(x)) & = & 0 \\ x^2 + e^{f(x)} + \cos(g(x)) & = & 2 \end{array}$$

Aufgabe 37: (10 Punkte)

Es sei $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel $\sigma-$Algebra auf $\mathbb{R}$ und $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ das Borelmaß.

a) Zeige, daß

$$\begin{array}{rcl} \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \to & [0,\infty] \\ A & \mapsto & \int\limits_A \frac{|x|}{1+x^2} d\lambda(x) \end{array}$$

ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definiert.

b) Es sei $\begin{array}{rcl} g_n : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{|x|}{(1+x^2)(1+x^{2n})} \end{array}$. Zeige, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} g_n(x)d\lambda(x)$ existiert und

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} g_n(x)d\lambda(x) = \nu(]-1,1[) = \ln 2$$

gilt.

Aufgabe 38: (15 Punkte) Es sei $d \in \mathbb{N}$, $A \in M_d(\mathbb{R})$ eine selbstadjungierte Matrix, die nur strikt positive Eigenwerte besitzt und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$. Zeige:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle x, Ax \rangle} d\lambda^d(x) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Neu:
Aufgabe 39: (15 Punkte) Es sei λ^d das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^d$ und $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

a) Es sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit kompaktem Träger. Zeige, daß für jedes $j \in \{1, ..., d\}$ gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) d\lambda^d(x) = 0$$

b) Es seien $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und eine dieser Funktionen habe kompakten Träger. Zeige, daß für jedes $j \in \{1, ..., d\}$ gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\overline{g(x)} d\lambda^d(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)} d\lambda^d(x)$$

c) Es seien $f : U \to \mathbb{C}$ und $g : U \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und eine dieser Funktionen habe kompakten Träger in U. Zeige, daß für jedes $j \in \{1, ..., d\}$ gilt:

$$\int\limits_{U} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\overline{g(x)} d\lambda^d(x) = -\int\limits_{U} f(x)\overline{\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)} d\lambda^d(x)$$

Aufgabe 40: (15 Punkte) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in W^m(U)$ und $\varphi \in C_0^\infty(U)$. Zeige $\varphi f \in W^m(U)$ und für alle $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq m$ gilt

$$\partial^\alpha(\varphi f) = \sum_{\substack{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{N}_0^d \\ \beta_1 \leq \alpha_1, \ldots, \beta_d \leq \alpha_d}} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_d}{\beta_d} \partial^\beta \varphi \partial^{\alpha - \beta} f$$

Aufgabe 41: (25 Punkte) Zeige:

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & x^n e^{-\frac{1}{2}x^2} \end{array} \in L^2(\mathbb{R})$.

b) $\mathrm{lin}\{f_n : n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq L^2(\mathbb{R})$ ist dicht.
Hinweis: Bestimme für $g \in V^\perp := \mathrm{lin}\{f_n : n \in \mathbb{N}_0\}^\perp$ die Fouriertransformierte von $g \cdot f_0$.

c) Berechne mit dem Gram-Schmidt Verfahren eine Orthonormalbasis von

$$W := \mathrm{lin}\{f_0, f_1, f_2\} \subseteq L^2(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 42: (10 Punkte) Es sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}$ mit $\langle x_n, x_m \rangle = 0$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$. Zeige, daß dann äquivalent sind:

a) Die Folge $\left(\sum_{n=1}^{N} x_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathcal{H}$.

b) Die Folge $\left(\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2 \right)_{N \in \mathbb{N}}$ konvergiert in $[0, \infty[$.