

Blatt 11 zu Mathematik III für Physiker**Aufgabe 31: (15 Punkte)**

a) Für jedes $p \in [1, \infty[$ ist $i : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$ eine stetige Einbettung.
 $f \mapsto f$

b) Für jedes $p \in [1, \infty[$ ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 32: (10 Punkte)

Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$

a) Zeige: Zu $x \in \mathbb{R}^d$, wird durch $(\eta_x f)(y) := f(y - x)$ ein Element $\eta_x f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ definiert.

b) Zeige: Für alle $k \in \mathbb{R}^d$ gilt: $\mathcal{F}(\eta_x f)(k) = e^{-i\langle k, x \rangle} (\mathcal{F}f)(k)$

Aufgabe 33: (15 Punkte) Zeige:

a) $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die einzige auf ganz \mathbb{R} definierte Lösung des Anfangswertproblems
 $t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t^2}$

$$x' = -tx, x(0) = 1.$$

Hinweis: Beachte Lemma 14.2.3.

b) Für $\psi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist $\mathcal{F}(\psi_1) = \psi_1$.
 $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x^2}$

c) Für $\psi_d : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist $\mathcal{F}(\psi_d) = \psi_d$.
 $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}$