

Blatt 10 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 28: (15 Punkte)

a) Es seien $y_1, \dots, y_n \in]0, \infty[$ und $t_1, \dots, t_n \in [0, \infty[$ mit $t_1 + \dots + t_n = 1$. Zeige:

$$\prod_{k=1}^n y_k^{t_k} \leq \sum_{k=1}^n t_k y_k.$$

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \rightarrow [0, \infty[$ sei $\mathcal{A}$ -meßbar. Zeige:

b) $I := \{p \in [1, \infty[: f \in L^p(X)\}$ ist ein Intervall.

c) $\varphi : I \rightarrow [0, \infty[$ ist stetig.
 $p \mapsto \|f\|_{L^p}$

Aufgabe 29: (10 Punkte)

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ -endlicher Maßraum und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ ein endlicher Maßraum. $k : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ sei $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -meßbar mit $\sup\{|k(x, y)| : x \in X, y \in Y\} < \infty$. Zeige daß durch

$$(Kf)(y) := \int_X k(x, y) f(x) d\mu(x)$$

eine beschränkte lineare Abbildung $K : L^1(X) \rightarrow L^2(Y)$ definiert wird und schätze die

$$f \mapsto Kf$$

Operatornorm nach oben ab.

Aufgabe 30: (10 Punkte)

Für $t \in \mathbb{R}$ seien $f_t :]-1, 1[\rightarrow [-1, 1]$ und $g_t :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$. Zeige, daß für

$$x \mapsto \sin(tx) \qquad x \mapsto x \cos(tx)$$

$p \in [1, \infty[$ die Abbildung $\Phi_p : \mathbb{R} \rightarrow L^p(]-1, 1[)$ differenzierbar ist mit $\Phi'(t) = g_t$.

$$t \mapsto f_t$$