



Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin

Wintersemester 2020/21

Mathematik III für Physiker

1. Übungsblatt

Aufgabe 1: Messbarkeit monotoner Funktionen

(10 Punkte)

Man weise nach, dass jede reellwertige monotone Funktion f auf einem Intervall I in $\mathbb{R}$ stets Borel-messbar ist.

Aufgabe 2: Abbildungen mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen

(10 Punkte)

Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei hausdorffsche topologische Räume. Man beweise, dass jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$, für die die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen

$$U(f) := \{x \in X \mid f \text{ ist nicht stetig im Punkt } x\}$$

abzählbar ist, Borel-messbar sein muss.

Aufgabe 3: Inklusions-Exklusionsprinzip

(15 Punkte)

Im Folgenden bezeichne $(X, \mathcal{A}, \mu)$ einen Maßraum und eine Menge $A \in \mathcal{A}$ besitzt endliches μ -Maß, falls $\mu(A) < \infty$.

- (a) Für $A, B, C \in \mathcal{A}$ mit endlichem μ -Maß zeige man: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ und

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B \cup C) &= \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) \\ &\quad - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

- (b) Man beweise allgemeiner, dass für $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ mit endlichem μ -Maß gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\}: \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|-1} \mu\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$