Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin Wintersemester 2020/21

Analysis mehrerer Variablen
8. Tutoriumsblatt

Im Folgenden seien stets $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.

Aufgabe 1: Die Länge des Graphen einer Funktion
Für $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ betrachten wir die Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := (t, f(t))$, die den Graphen $\Gamma(f)$ von f im folgenden Sinne parametrisiert:

$$\Gamma(f) = \{\gamma(t) \mid t \in [a,b]\} = \gamma([a,b]).$$

(a) Man weise nach, dass γ rektifizierbar ist, und finde eine allgemeine Formel für die Länge $L(\gamma)$ der Kurve γ, mit der man Länge von $\Gamma(f)$ erhält.

(b) Indem man verwende, dass die Wurzelfunktion subadditiv ist und damit $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}$ für alle $x, y \geq 0$ erfüllt, folgere man, dass

$$\max\left\{b-a, \int_a^b |f'(t)|\,dt\right\} \leq L(\gamma) \leq b-a+\int_a^b |f'(t)|\,dt.$$

Aufgabe 2: Beispiele zur Berechnung der Länge von Graphen
Man rechne die Länge der Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := (t, f(t))$ für die beiden folgenden Wahlen der Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ aus:

(a) $f(t) = \cosh(t)$ für jedes $t \in [a,b]$.

(b) $f(t) = (\alpha/2)t^2$ für alle $t \in [a,b]$ mit $\alpha > 0$.

Aufgabe 3: Die Länge einer rotierenden Kurve
Für $r, \varphi \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ sei die Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) := r(t)\big(\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t))\big).$$

(a) Man zeige wie in Aufgabe 1, dass die Kurve γ rektifizierbar ist, und gebe eine allgemeine Formel für $L(\gamma)$ an.

(b) Mithilfe der Subadditivität der Wurzelfunktion und der Formel aus (a) leite man nun a priori Abschätzungen für $L(\gamma)$ her.

Aufgabe 4: Die Länge eines Teilstücks eines Kreisbogens
Es seien $\alpha \in [-1,1]^2$ mit $\alpha_1 \leq \alpha_2$ und $r > 0$. In dieser Aufgabe soll die Länge des Teilstücks

$$T^\alpha(r) := \{(x,y) \in [\alpha_1 r, \alpha_2 r] \times [0,r] \mid x^2+y^2 = r^2\}$$

des Kreisbogens $\mathbb{S}^1(r) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = r^2\}$ bestimmt werden.

(a) Man finde $\hat{\alpha} \in [0,\pi]^2$ mit $\hat{\alpha}_1 \geq \hat{\alpha}_2$, so dass $T^\alpha(r) = \gamma([\hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_1])$ für die surjektive Abbildung $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{S}^1(r)$ definiert durch $\gamma(t) := r(\cos(t), \sin(t))$ gilt.

(b) Mit der allgemeinen Formel für $L(\gamma)$ aus Aufgabe 3 berechne man die Länge von $T^\alpha(r)$. Welchen Wert erhält man für $\alpha_1 = -1$ und $\alpha_2 = 0$?