Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin Wintersemester 2020/21

Analysis mehrerer Variablen
6. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Beispiel zu transformierten Flächen

Für $\alpha > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ betrachten wir die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ koordinatenweise definiert durch

$$f_1(x, y) := e^{\alpha x} \cos(g(x, y)) \quad \text{und} \quad f_2(x, y) := e^{\alpha x} \sin(g(x, y)).$$

(a) Man belege, dass f stetig differenzierbar ist, und berechne sowohl die Jacobi-Matrix $D(f)$ als auch die dazugehörige Determinantenfunktion $\det(Df)$.

(b) Für eine stetige Funktion $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ sei $B := \{(x, y) \in [0, 1]^2 \,|\, y \leq \varphi(x)\}$. Unter der Annahme, dass $\frac{\partial g}{\partial y} > 0$, gebe man den Flächeninhalt von $f(B)$ so explizit wie möglich an.

(c) Was gilt für $\lambda_2(f(B))$ in dem Fall, dass $g(x, y) = h(x)+y$ und $\varphi(x) = x$ für alle $x, y \in [0, 1]$ und einer stetig differenzierbaren Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Aufgabe 2: Beispiel zu geometrischen Mittelpunkten von Flächen

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Man gebe die Werte der beiden Integrale $\int_0^1 x^\alpha \, dx$ und $\int_1^\infty x^\alpha \, dx$ an.

(b) Man berechne den Flächeninhalt von $F_\alpha := \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, \infty[\,|\, y \leq x^\alpha\}$ und prüfe für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\int_{F_\alpha} \sqrt{x^2 + y^2} \, d\lambda_2(x, y) < \infty. \tag{1}$$

(c) Es gelte nun (1). Man bestimme den geometrischen Mittelwert $c(F_\alpha)$ von F_α, definiert in Aufgabe 16 des 6. Übungsblattes.

Aufgabe 3: Zweidimensionale Integration auf dem oberen Einheitskreis

Es bezeichne $K_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1, \, y \geq 0\}$ die obere Hälfte des Einheitskreises. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ werte man folgendes Integral aus:

$$\int_{K_+} x^2 (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}} \, d\lambda_2(x, y).$$

Aufgabe 4: Dreidimensionale Integration von Potenzen der Euklidischen Norm

Es sei B die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ bestehend aus allen Punkten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Man prüfe für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die beiden folgenden Integrale endlich sind:

$$\int_B (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha}{2}} \, d\lambda_3(x, y, z) \quad \text{und} \quad \int_{B^c} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha}{2}} \, d\lambda_3(x, y, z).$$