



Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin

Wintersemester 2020/21

Analysis mehrerer Variablen

5. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Beispiele zu Grenzwerten von Integralfolgen

Man zeige, dass die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimme ihre jeweiligen Werte:

- a) $\lim_{n \uparrow \infty} \int_0^\pi \sin(x)^{1/n} dx$.
- b) $\lim_{n \uparrow \infty} \int_0^1 n f(x) (1 + n^2 \sqrt{x})^{-1} dx$ für eine Borel-messbare Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, für die ein $c > 0$ existiert, so dass $|f(x)| \leq c\sqrt{x}$ für alle $x \in [0, 1]$. Kann man $f = \sin$ wählen?

Aufgabe 2: Beispiele zur Auswertung von Integralen

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $n \in \mathbb{N}$ gebe man die beiden folgenden Integrale explizit an:

$$\int_a^b \frac{x^{3n-1}}{1+x^{2n}} dx \quad \text{und} \quad \int_a^b \frac{x^{3n-1}}{(1+x^{2n})^2} dx.$$

Aufgabe 3: Weitere Beispiele zur Auswertung von Integralen

Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \geq 0$ und $\beta > -1$. Man berechne folgende Integrale explizit:

- a) $\int_1^e x^{-1} \sin(\pi \log(x)) dx$.
- b) $\int_0^1 e^{\alpha x} (\beta + e^{\alpha x})^\gamma dx$.
- c) $\int_0^1 x^{\alpha-1} (\beta + x^\alpha)^\gamma dx$ im Falle $\beta > 0$.

Aufgabe 4: Beispiel zur zweidimensionalen Lebesgue-Integrierbarkeit

Man prüfe für welche $\beta > 0$ die Funktion $f_\beta :]0, 1[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_\beta(x, y) := \frac{x^2 - y^\beta}{(x^2 + y^\beta)^2}$$

Lebesgue-integrierbar ist. Dazu kann der Satz von Fubini hilfreich sein.