



Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin

Wintersemester 2020/21

## Analysis mehrerer Variablen

### 3. Tutoriumsblatt

#### Aufgabe 1: Erzeugte Mengenringe

Es seien  $X$  eine nicht-leere Menge,  $\mathcal{E}$  ein nicht-leeres Mengensystem in  $\mathcal{P}(X)$  und

$$\mathcal{F} := \left\{ \bigcup_{i=1}^n E_i \mid n \in \mathbb{N}, E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E} \right\}. \quad (1)$$

Man weise die folgenden drei Aussagen nach:

- $\mathcal{F}$  ist  $\cup$ -stabil und jeder Mengenring  $\mathcal{G}$ , der  $\mathcal{E}$  enthält, erfüllt auch  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ . Ist zudem  $\mathcal{E}$   $\cap$ -stabil, so besitzt auch  $\mathcal{F}$  diese Eigenschaft.
- $\mathcal{E}$  sei  $\cap$ -stabil,  $\emptyset \in \mathcal{E}$  und es gelte  $E \setminus D \in \mathcal{F}$  für alle  $D, E \in \mathcal{E}$  mit  $D \subset E$ . Dann ist  $\mathcal{F}$  ein Mengenring.
- Ist  $\mathcal{E}$   $\cap$ -stabil und  $E \setminus D$  die endliche Vereinigung von disjunkten Mengen in  $\mathcal{E}$  für alle  $D, E \in \mathcal{E}$  mit  $D \subset E$ , so gibt es zu jedem  $A \in \mathcal{F}$  ein  $n \in \mathbb{N}$  und paarweise disjunkte Mengen  $E_1, \dots, E_n$  in  $\mathcal{E}$  mit  $A = \bigcup_{i=1}^n E_i$ .

#### Aufgabe 2: Existenz und Eindeutigkeit von Inhalten auf erzeugten Mengenringen

Es seien  $X$  eine nicht-leere Menge,  $\mathcal{E}$  ein  $\cap$ -stabiles Mengensystem in  $\mathcal{P}(X)$  mit  $\emptyset \in \mathcal{E}$  und  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$  definiert durch (1). Es gelte  $E \setminus D \in \mathcal{F}$  für alle  $D, E \in \mathcal{E}$  mit  $D \subset E$ .

- Man beweise, dass ein Inhalt  $\mu$  auf  $\mathcal{F}$  eindeutig durch seine Werte auf  $\mathcal{E}$  bestimmt ist. Das bedeutet, ist  $\nu$  ein weiterer Inhalt auf  $\mathcal{F}$ , der

$$\mu(E) = \nu(E) \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}$$

erfüllt, so folgt stets  $\mu = \nu$ .

- Es sei  $\mu_0$  eine  $[0, \infty]$ -wertige Funktion auf  $\mathcal{E}$  mit  $\mu_0(\emptyset) = 0$ , die additiv im folgenden Sinne ist: Für  $n \in \mathbb{N}$  und paarweise disjunkte Mengen  $E_1, \dots, E_n$  in  $\mathcal{E}$  mit  $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{E}$  gilt

$$\mu_0\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu_0(E_i).$$

Unter der Annahme, dass jedes  $A \in \mathcal{F}$  als endliche Vereinigung paarweiser disjunkter Mengen in  $\mathcal{E}$  geschrieben werden kann, zeige man, dass es genau einen Inhalt  $\mu$  auf  $\mathcal{F}$  gibt, der  $\mu = \mu_0$  auf  $\mathcal{E}$  leistet. In diesem Fall ist  $\mu$  endlich, falls  $\mu_0$  es ist.

### Aufgabe 3: Das Lebesguesche Prämaß

Zu dem Mengensystem aller links halboffenen und beschränkten Interalle betrachten wir den dazugehörigen Mengenring:

$$\mathcal{F}_1 := \left\{ \bigcup_{i=1}^n ]a_i, b_i] \mid n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}^n: a_i \leq b_i \forall i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

- (a)  $\mathcal{F}_1$  ist ein Mengenring über  $\mathbb{R}$  und zu jedem  $A \in \mathcal{F}_1$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  und  $a, b \in \mathbb{R}^n$  mit  $a_i \leq b_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $A = \bigcup_{i=1}^n ]a_i, b_i]$ , so dass im Falle  $n \geq 2$  stets  $b_i \leq a_{i+1}$  für alle  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  gilt.
- (b) Man zeige, dass es genau einen Inhalt  $\lambda_1$  auf  $\mathcal{F}_1$  gibt, der  $\lambda_1(]a, b]) = b - a$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq b$  erfüllt. Zudem folgere man, dass  $\lambda_1$  endlich sein muss.