LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin Wintersemester 2020/21

Analysis mehrerer Variablen
2. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Das Integral als linearer monotoner Operator
Auf einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ weise man nach, dass das μ-Integral wie folgt als Erweiterung des Maßes μ aufgefasst werden kann:

$$\int_X \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A) \quad \text{für all } A \in \mathcal{A}.$$

Zudem beweise man die beiden folgenden Eigenschaften des μ-Integrals für $\alpha \in [0, \infty[$ und zwei $\mathcal{A}$-Stufenfunktionen f und g:

(i) *Linearität:* $\int_X \alpha f \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu$ und $\int_X f + g \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$.

(ii) *Monotonie:* Ist $f \leq g$, git also $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X$, so ist $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.

Aufgabe 2: Die Poisson-Verteilung
Es sei P_λ die Poisson-Verteilung zu einem Parameter $\lambda > 0$ gegeben als Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem messbaren Raum $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ durch

$$P_\lambda = e^{-\lambda} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\lambda^n}{n!} \delta_n.$$

Man beweise, dass das erste Moment $\int_{\mathbb{N}_0} n \, dP_\lambda(n)$ dieser Verteilung, das als P_λ-Integral der Identität $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $n \mapsto n$ aufgefasst werden kann, endlich ist und bestimme ihren Wert.

Aufgabe 3: Die geometrische Verteilung
Es bezeichne nun P_p die geometrische Verteilung zu einem Parameter $p \in]0, 1[$, die man als Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem messbaren Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ wie folgt definiert:

$$P_p = p \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)^{n-1} \delta_n.$$

(i) Man zeige, dass dieses Maß in der Tat normiert ist, es erfüllt also $P_p(\mathbb{N}) = 1$.

(ii) Man berechne nun das erste Moment $\int_{\mathbb{N}} n \, dP_p(n)$ dieser Verteilung.

Aufgabe 4: Vertauschung von Reihen und Integralen
Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Man beweise, dass für jede Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $[0, \infty]$-wertigen $\mathcal{A}$-messbaren Funktion auf X stets

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu$$

erfüllt ist.