Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin Wintersemester 2020/21

Analysis mehrerer Variablen
12. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Beispiel zur Lebesgue-Integrierbarkeit

(a) Indem man eine Stammfunktion von arctan bestimme, zeige man, dass $\pi/2 - \arctan$ nicht auf $]0, \infty[$ Lebesgue-integrierbar ist.

(b) Man prüfe nun für welche $\alpha \in]0, 1[$ die stetige Funktion

$$]0, \infty[\to]0, \infty[, \quad x \mapsto \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}{x^\alpha}$$

Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 2: Ein Lebesgue-Integral über dem Einheitskreis

Für den offenen Einheitskreis $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ und $\alpha \in [0, 2[$ gebe man den Wert des Integrals

$$\int_K \frac{\log(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \, d\lambda_2(x, y)$$

explizit an.

Aufgabe 3: Ein eindimensionales Dirichlet-Problem

Zu $t_0, t_1, x_0, x_1, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $t_0 < t_1$ zeige man, dass es genau eine stetige Funktion $\lambda : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ gibt, die zweimal differenzierbar auf $]t_0, t_1[$ ist, so dass

$$\lambda'' = \alpha \quad \text{auf }]t_0, t_1[\quad \text{und} \quad \lambda(t_i) = x_i \quad \text{für } i \in \{0, 1\}.$$

Aufgabe 4: Beispiel einer unbeschränkt wachsenden Lösung

Für $\varepsilon > 0$ und $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ bestimme man die eindeutige und nicht-erweiterbare Lösung zu dem autonomen Anfangswertproblem

$$x' = \varepsilon + x^2, \quad x(t_0) = x_0.$$

Als Nachweis für die Nicht-Erweiterbarkeit genügt es dabei, das größtmögliche Lösungsintervall herzuleiten.