Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin Wintersemester 2020/21

Analysis mehrerer Variablen
11. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Hinrichende Kritierien für fehlende Lipschitz-Stetigkeit
Es sei f eine reellwertige Funktion auf einem Interval J in $\mathbb{R}$ mit $J^\circ \neq \emptyset$.

(a) Falls es zu jedem $c > 0$ ein nicht-leeres und offenes Intervall I in J gibt, auf dem f differenzierbar ist, so dass $f'(x) > c$ für alle $x \in I$, so ist f nicht global Lipschitz-stetig.

(b) Falls es ein $x_0 \in J$ und $\varepsilon > 0$ gibt, so dass f auf $(]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus\{x_0\}) \cap J$ differenzierbar ist und $\limsup_{x\to x_0} f'(x) = \infty$ gilt, so kann f nicht lokal Lipschitz-stetig sein.

Aufgabe 2: Lokale Lipschitz-Stetigkeit bei Quotienten von Funktionen

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $V \subset \mathbb{K}^n$ ein Gebiet und $f : V \to \mathbb{K}$, $g : V \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ zwei lokal Lipschitz-stetige Funktionen. Man zeige, dasss f/g wieder lokal Lipschitz-stetig ist.

(b) Man prüfe nun exemplarisch, ob die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) := \left(\frac{x}{1 + |x| + |y|}, x^2 + y^2\right)$$

lokal oder global Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 3: Beispiel zur Hölder-Stetigkeit
Für $\alpha \in]0, 1[$ soll in dieser Aufgabe gezeigt werden, dass die Potenzfunktion $\varphi_\alpha : [0, \infty[\to [0, \infty[$, $x \mapsto x^\alpha$ Hölder-stetig zum Exponenten α mit α-Hölder-Konstanten 1 ist. Das heißt,

$$|\varphi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(y)| \leq |x - y|^\alpha \quad \text{für alle } x, y \geq 0. \tag{1}$$

(a) Indem man die Ungleichung (1) zunächst für $x \in [0, 1]$ und $y = 1$ nachweise, folgere man die behauptete α-Hölder-Stetigkeit von φ_α.

(b) Man zeige zudem, dass es kein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass φ_α auf $]0, \varepsilon[$ Lipschitz-stetig ist. Daher kann φ_α nicht lokal Lipschitz-stetig sein.

Aufgabe 4: Eine Klasse zweidimensionaler linearer Differentialgleichungen
Es sei $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2\times 2})$, so dass $A(t)$ eine obere Dreiecksmatrix für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. Man bestimme die eindeutige globale Lösung x zu der homogenen linearen Differentialgleichung

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

mit Anfangswertbedingung $x(t_0) = \hat{x}$ explizit, wobei $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$. Existiert der Grenzwert $\lim_{t\uparrow\infty} x(t)$ im Fall

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\alpha t & \beta t \\ 0 & -\gamma t \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

mit $\alpha, \gamma > 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha \neq \gamma$?