LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin Wintersemester 2020/21

Analysis mehrerer Variablen
10. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: Bernoulli-Differentialgleichung

Es seien $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und g, h zwei reellwertige stetige Funktionen auf I. Die auf dem Gebiet $V := I \times]0, \infty[$ erklärte Differentialgleichung

$$x'(t) = g(t)x(t) + h(t)x^{\alpha}(t) \tag{1}$$

wird *Bernoulli-Differentialgleichung* genannt. Man weise nach, dass eine Funktion $\lambda : I \to]0, \infty[$ genau dann (1) löst, wenn $\mu : I \to]0, \infty[$ definiert durch $\mu(t) := \lambda(t)^{1-\alpha}$ eine Lösung von

$$y'(t) = (1 - \alpha)\big(g(t)y(t) + h(t)\big)$$

darstellt.

Aufgabe 2: Beispiele von Differentialgleichungen

Man beweise, dass die beiden folgenden Anfangswertprobleme eindeutige und nicht-erweiterbare Lösungen besitzen, und bestimme diese explizit:

(a) $x' + tx + t\sqrt[3]{x} = 0$, $x(1) = 8$.

(b) $x + t + (t - x)x' = 0$, $x(1) = 0$.

Um dabei die Nicht-Erweiterbarkeit der Lösungen nachzuweisen, genügt es, die größtmöglichen offenen Lösungsintervalle anzugeben.

Aufgabe 3: Konstruktion integrierender Faktoren

Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und sternförmig, $(t_0, x_0) \in U$ und $f, g \in C^1(U)$. Für die Differentialgleichung

$$f(t, x) + g(t, x)x' = 0, \tag{2}$$

von der man annehme, dass sie nicht exakt sei, zeige man die beiden folgenden Aussagen:

(a) Es gelte $f \neq 0$ und die Funktion $m : U \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$m(t, x) := \frac{1}{f(t, x)}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t}\Big)(t, x).$$

Gibt es für alle $(t, x) \in U$ eine Umgebung $V_{t,x}$ von t, so dass $V_{t,x} \times [x_0, x] \subset U$ und $m(s, y) = m(t, y)$ für jegliche $(s, y) \in V_{t,x} \times [x_0, x]$, so ist $M : U \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$M(t, x) := \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} m(t, y)\, dy\Big)$$

ein integrierender Faktor für (2).

(b) Es gelte nun $g \neq 0$ und die Funktion $m : U \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$m(t,x) := \frac{1}{g(t,x)} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t} \right)(t,x).$$

Gibt es für alle $(t,x) \in U$ eine Umgebung $W_{t,x}$ von x, so dass $[t_0, t] \times W_{t,x} \subset U$ und $m(s,x) = m(s,y)$ für jegliche $(s,y) \in [t_0,t] \times W_{t,x}$, so ist $M : U \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$M(t,x) := \exp\left(\int_{t_0}^{t} m(s,x)\, ds \right)$$

ein integrierender Faktor für (2).