Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin Wintersemester 2020/21

Analysis mehrerer Variablen
8. Übungsblatt

In den beiden folgenden Aufgaben seien I ein kompaktes Intervall der Form $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $a \leq b$, und X ein Banachraum, ausgestattet mit einer vollständigen Norm $\|\cdot\|$.

Aufgabe 22: Absolut stetige Abbildungen *(10 Punkte)*

Wir betrachten eine Abbildung $\gamma : I \to X$, die absolut stetig ist. Das heißt, für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} \|\gamma(s_i) - \gamma(t_i)\| < \varepsilon$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $s, t \in I^n$ mit $s_i \leq t_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, so dass die Intervalle $(]s_i, t_i])_{i \in \{1,\dots,n\}}$ paarweise disjunkt sind und $\sum_{i=1}^{n} |s_i - t_i| < \delta$.

(a) Man weise nach, dass γ damit stets gleichmäßig stetig und beschränkt ist.

(b) Indem man eine beliebige Zerlegung $\mathcal{Z}$ von I mithilfe der äquidistanten Zerlegungen

$$\mathcal{Z}_m := \{a + (i/m)(b - a) \,|\, i \in \{0, \dots, m\}\} \quad \text{für } m \in \mathbb{N}$$

verfeinere, beweise man, dass γ von endlicher Variation ist.

Aufgabe 23: Rektifizierbarkeit absolut stetiger Abbildungen *(10 Punkte)*

Es sei $\gamma : I \to X$ eine stetige Abbildung.

(a) Es existiere eine Funktion $V : I \times I \to [0, \infty]$, so dass

$$\|\gamma(s) - \gamma(t)\| \leq V(s, t) \quad \text{und} \quad V(r, s) + V(s, t) \leq V(r, t)$$

für alle $r, s, t \in I$ mit $r \leq s \leq t$. Man finde eine explizite obere Schranke für die Variation $\mathrm{Var}(\gamma, I)$, um die Rektifizierbarkeit von γ im Falle der Endlichkeit von V nachzuweisen.

(b) Aus (a) folgere man, dass γ rektifizierbar ist, falls es eine $[0, \infty[$-wertige Borel-messbare Lebesgue-integrierbare Funktion ρ auf I gibt, so dass

$$\|\gamma(s) - \gamma(t)\| \leq \int_s^t \rho(\tilde{s})\, d\tilde{s} \quad \text{für alle } s, t \in I \text{ mit } s \leq t.$$

Aufgabe 24: Ankreuzaufgaben zur Vorlesung *(20 Punkte)*

Entscheide in den folgenden Aufgaben, ob die verschiedenen Aussagen unter den jeweiligen Voraussetzungen richtig oder falsch sind.

- Setze für "richtig" ein Kreuz in das erste Feld, für "falsch" ein Kreuz in das zweite Feld, und kein Kreuz, falls du keine Aussage machen willst. Das heißt,

  ☒ ☐ für "Aussage richtig",

  ☐ ☒ für "Aussage falsch",

  ☐ ☐ für "keine Aussage".

- Für jede korrekte Entscheidung gibt es einen Punkt, für jede falsche Entscheidung wird ein Punkt abgezogen, sofern es Punkte zum Abziehen gibt. Falls keine Aussage gemacht wurde, gibt es weder einen Plus- noch einen Minuspunkt.

(a) Es sei λ^2 das Borel-Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^2$ und für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sei $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definiert durch $f_n(x, y) := (i + (x^2 + y^2)^n)^{-1}$.

☐ ☐ f_n ist nicht Borel-messbar.

☐ ☐ f_n ist λ^2-integrierbar.

☐ ☐ Mit dem Satz der monotonen Konvergenz folgt $\lim_{n\uparrow\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_n \, d\lambda^2 = 0$.

☐ ☐ $\lim_{n\uparrow\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_n \, d\lambda^2 = -i\pi$.

(b) Es sei λ das Borel-Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ gegeben durch $f(x) := x^4$.

☐ ☐ f ist λ-integrierbar auf $\mathbb{R}$.

☐ ☐ f ist auf jedem kompakten Intervall λ-integrierbar.

☐ ☐ $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$, $A \mapsto \int_A f \, d\lambda$ definiert ein endliches Maß.

☐ ☐ $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$, $A \mapsto \int_A f \, d\lambda$ definiert ein σ-endliches Maß.

(c) Es sei $\mathcal{E} := \{\{3k\} : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

☐ ☐ $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$.

☐ ☐ $\sigma(\mathcal{E}) = \{\bigcup_{l\in L}\{3l\} \mid L \subseteq \mathbb{N}\} \cup \{(\mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}) \cup (\bigcup_{l\in L}\{3l\}) \mid L \subseteq \mathbb{N}\}$.

☐ ☐ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(n) := 1$, falls n ungerade, und $f(n) := 2$, falls n gerade, ist $\sigma(\mathcal{E})$-$\sigma(\{2\})$-messbar.

☐ ☐ $f + 2$ ist $\sigma(\mathcal{E})$-$\sigma(\{2\})$-messbar.

(d) Es sei $f :]0, \infty[\times]0, \infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := \sin(x)x^{-1}e^{-xy}$.

☐ ☐ Für jedes $y \geq 0$ ist $f(\cdot, y) :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)x^{-1}e^{-xy}$ λ-integrierbar.

☐ ☐ $I :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $y \mapsto \int_0^\infty f(x, y) \, dx$ ist differenzierbar.

☐ ☐ $I'(y) = 0$ für alle $y > 0$.

☐ ☐ $I'(y) = -(1 + y^2)^{-1}$ für jedes $y > 0$.

(e) ☐ ☐ $\int_0^1 \sqrt{1 - t^2} \, dt = \frac{\pi}{4}$.

☐ ☐ $\int_0^\pi e^x \sin(x) \, dx = e^\pi$.

☐ ☐ $\int_2^4 \frac{1}{2x^2+4x-1} \, dx = 0$.

☐ ☐ $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$.