



Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin

Wintersemester 2020/21

Analysis mehrerer Variablen

6. Übungsblatt

Aufgabe 16: Der geometrische Mittelpunkt

(10 Punkte)

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und λ_n das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda_n(B) \in]0, \infty[$ und $\int_B |x| dx < \infty$ wird der Vektor

$$c(B) := \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B x dx$$

in $\mathbb{R}^n$ der geometrische Mittelpunkt von B genannt.

- (a) Man zeige nach, dass $\lambda_n(B)$ und $\int_B |x| dx$ notwendigerweise endlich sind, falls es eine λ_n -Nullmenge $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gibt, so dass $B \cap N^c$ beschränkt ist.
- (b) Für eine Folge $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Borelmengen in B , die $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = B$ und $\lambda_n(B_k) > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ leisten, stelle man $c(B)$ mithilfe der Folge $(c(B_k))_{k \in \mathbb{N}}$ dar.
- (c) Für $i \in \{1, \dots, n\}$ wird B symmetrisch bezüglich des Unterraums $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0\}$ genannt, wenn für die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ koordinatenweise definiert durch

$$\varphi_j(x) := x_j \quad \text{für } i \neq j \quad \text{und} \quad \varphi_j(x) := -x_j \quad \text{für } i = j$$

die Gleichung $\varphi(B) = B$ gilt. Man zeige in diesem Fall: $c_i(B) = 0$.

Aufgabe 17: Konstruktion endlich-dimensionaler Kegel

(10 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$, eine nicht-leere Borelmenge B in $\mathbb{R}^n$ und einem Punkt $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $p_{n+1} \neq 0$ wird die Menge

$$C := \{(1-t)(x_1, \dots, x_n, 0) + tp \mid x \in B, t \in [0, 1]\}$$

in $\mathbb{R}^{n+1}$ als Kegel mit der Grundfläche B und der Spitze p bezeichnet. Man gebe $\lambda_{n+1}(C)$ mithilfe von $\lambda_n(B)$ und p_{n+1} an, indem man den Transformationssatz anwende.

Aufgabe 18: Das Volumens eines Teilstücks einer Kugel

(15 Punkte)

Für $R > 0$ und $\rho \in [0, R]$ soll in dieser Aufgabe das Volumen des Teilstücks

$$B^\rho(R) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 \geq \rho^2\}$$

einer Kugel um den Nullpunkt mit Radius R berechnet werden. Dazu haben wir zwei Methoden kennengelernt.

- (a) Man leite $\lambda_3(B^\rho(R))$ mit dem Cavalierischen Prinzip und der bekannten Formel für den Flächeninhalt eines Kreises her.
- (b) Nun bestimme man das Volumen mittels sphärischer Koordinaten.