Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin Wintersemester 2020/21

Analysis mehrerer Variablen
5. Übungsblatt

Aufgabe 13: Die Gamma-Funktion *(10 Punkte)*

In dieser Aufgabe betrachten wir die Gamma-Funktion $\Gamma :]0,\infty[\to]0,\infty[$ definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

a) Mit partieller Integration und einem Induktionsbeweis zeige man, dass $\Gamma(n)$ endlich ist und bestimme diesen Funktionswert für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Man beweise, dass Γ eine endliche und stetige Funktion ist, die $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für alle $x > 0$ erfüllt.

Aufgabe 14: Integraltransformationen mit Borelmaßen *(10 Punkte)*

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f : X \to [0,\infty]$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion. Für ein Borel-Maß ν auf $[0,\infty[$, also einem Maß auf dem messbaren Raum

$$([0,\infty[, \mathcal{B}([0,\infty[)),$$

das $\nu(K) < \infty$ für jede kompakte Menge K in $[0,\infty[$ leistet, zeige man

$$\int_X \nu([0, f(x)[)\, \mu(dx) = \int_0^\infty \mu(\{x \in X \mid f(x) > t\})\, \nu(dt).$$

Aufgabe 15: Flächeninhalt eines Teilstücks einer Ellipse *(15 Punkte)*

Es seien $\alpha \in [0,1]^2$ und $\beta \in [-1,1]^2$ mit $\alpha_1 \le \alpha_2$, $\beta_1 \le \beta_2$, $\beta_2 \ge 0$ und $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \ge 1$. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, den Flächeninhalt des Teilstücks

$$E_{a,b}^{\alpha,\beta}(r) := \{(x,y) \in [\alpha_1 ar, \alpha_2 ar] \times [\beta_1 br, \beta_2 br] \mid (x/a)^2 + (y/b)^2 \le r^2\}$$

einer Ellipse mit den Parametern $a, b, r > 0$, die im 4. Tutoriumsblatt behandelt wurde, zu berechnen. Dazu gehen wir in zwei Schritten vor:

a) Man lege dar, dass $E_{a,b}^{\alpha,\beta}(r)$ eine Borelmenge ist, und verwende das Cavalierische Prinzip, um einen Zusammenhang zwischen $\lambda_2(E_{a,b}^{\alpha,\beta}(r))$ und dem Integral

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \alpha_2 \wedge \sqrt{1-x^2}\, dx$$

herzuleiten.

b) Mit einer Fallunterscheidung berechne man $\int_{\beta_1}^{\beta_2} \alpha_2 \wedge \sqrt{1-x^2}\, dx$ und gebe damit eine Formel für $\lambda_2(E_{a,b}^{\alpha,\beta}(r))$ an. Wie reduziert sich die Formel im Fall $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ und $\alpha_2 = 1$?