LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin Wintersemester 2020/21

Analysis mehrerer Variablen
4. Übungsblatt

Aufgabe 10: Beispiel einer Integralfunktion *(10 Punkte)*

Im Folgenden bezeichne λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$.

(a) Man zeige, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{x}{(1+x^2)^2}$ Lebesgue-integrierbar auf $[0, \infty[$ ist. Das heißt, $g\mathbb{1}_{[0,\infty[}$ ist λ-integrierbar.

(b) Für eine Borel-messbare Lebesgue-integrierbare Funktion $h : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ beweise man, dass die Funktion

$$[0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad a \mapsto \int_0^\infty e^{-ax} h(x)\, dx$$

wohldefiniert und stetig ist, um damit den Grenzwert $\lim_{a\downarrow 0} \int_0^\infty e^{-ax} h(x)\, dx$ herzuleiten.

(c) Man berechne nun $\lim_{a\downarrow 0} \int_0^\infty e^{-ax} g(x)\, dx$.

Aufgabe 11: Beispiel einer Hilbertraum-wertigen Abbildung *(10 Punkte)*

Es bezeichne $l^2(\mathbb{N})$ den separablen Hilbertraum aller reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die $\sum_{n=1}^\infty x_n^2 < \infty$ erfüllen, ausgestattet mit dem Skalarprodukt definiert durch

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n.$$

Mit der von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierten Norm gegeben durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ stellt $l^2(\mathbb{N})$ insbesondere einen separablen Banachraum dar. Wir betrachten im Folgenden die Abbildung $f : [-1, 1] \to l^2(\mathbb{N})$ gegeben durch

$$f(x) := (2^{-n}|x|\sqrt{1-x^2})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Also, für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die n-te Koordinatenfunktion $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ von f von der Form $f_n(x) = 2^{-n}|x|\sqrt{1-x^2}$ für alle $x \in [-1, 1]$.

(a) Man weise nach, dass f in der Tat all seine Werte in $l^2(\mathbb{N})$ annimmt. Es gilt demnach $f(x) \in l^2(\mathbb{N})$ für jegliches $x \in [-1, 1]$.

(b) Indem man für alle $n \in \mathbb{N}$ zeige, dass f_n Borel-messbar und die n-te Projektionsabbildung $\pi_n : l^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_n$ Lipschitz-stetig ist, folgere man die Borel-Messbarkeit von f.

(c) Man beweise, dass f Lebesgue-integrierbar ist, und bestimme das Bochner-Integral

$$\int_{-1}^1 f(x)\, dx \in l^2(\mathbb{N})$$

koordinatenweise. Dazu kann die Abschätzung $\sqrt{\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2} \leq \sum_{n=1}^\infty |x_n|$, die für jede reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty$ gültig ist, hilfreich sein.

Aufgabe 12: Konstruktion von Maßen auf metrischen Räumen *(15 Punkte)*

Es seien (X, d) ein separabler metrischer Raum und $\alpha > 0$. Der Durchmesser einer nicht-leeren Menge A in X wird definiert durch

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\} \in [0, \infty]$$

mit der Konvention $\operatorname{diam}(\emptyset) := 0$. Zudem bezeichne $\mathcal{U}(A)$ das Mengensystem aller Folgen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Mengen in X, die A überdecken, also $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ leisten.

(a) Für $\varepsilon > 0$ weise man nach, dass die Funktion $\mu_\varepsilon : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\mu_\varepsilon(A) := \inf\left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(U_n)^\alpha \,\middle|\, U \in \mathcal{U}(A) \colon \operatorname{diam}(U_n) < \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}$$

ein äußeres Maß auf X ist, und charakterisiere dabei alle Mengen A in X mit $\mu_\varepsilon(A) < \infty$.

(b) Man zeige, dass der Grenzwert $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mu_\varepsilon(A)$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)$ existiert und die Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\mu(A) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mu_\varepsilon(A)$$

ein weiteres äußeres Maß auf X darstellt.