Dr. Heribert Zenk und Dr. Alexander Kalinin Wintersemester 2020/21

Analysis mehrerer Variablen (Lehramt Gymnasium)
3. Übungsblatt

Aufgabe 7: Integrale bezüglich Dirac-Maße *(10 Punkte)*

Auf einer nicht-leeren Menge X ist, wie wir aus der Vorlesung wissen, das Dirac-Maß in einem Punkt $\hat{x} \in X$ die Funktion

$$\delta_{\hat{x}} : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}, \quad \delta_{\hat{x}}(A) = \mathbf{1}_A(\hat{x}).$$

Mithilfe maßtheoretischer Induktion weise man nach, dass jegliche Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ stets $\delta_{\hat{x}}$-integrierbar ist und bestimme das $\delta_{\hat{x}}$-Integral $\int_X f \, d\delta_{\hat{x}}$ von f.

Aufgabe 8: Ein Integrierbarkeitskriterium *(10 Punkte)*

Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1, \infty[$. Eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt p-fach μ-integrierbar, falls

$$\int_X |f|^p \, d\mu < \infty.$$

Indem man disjunkte Zerlegungen verwende, weise man für $a \in]1, \infty[$ nach, dass f genau dann p-fach μ-integrierbar ist, wenn

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n \mu(\{x \in X : a^n \leq |f|^p(x) < a^{n+1}\}) < \infty.$$

Aufgabe 9: Approximation von Integralen *(15 Punkte)*

Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $p \in [1, \infty[$ und f eine komplexwertige $\mathcal{A}$-messbare Funktion auf X. Man beweise mithilfe des Satzes der monotonen Konvergenz, dass

$$\lim_{n \uparrow \infty} n^p \int_X \ln\left(1 + \frac{|f|}{n}\right)^p d\mu = \int_X |f|^p \, d\mu.$$