Ferienblatt zur Analysis mehrerer Variablen (Lehramt Gymnasium)

Wiederholung:

Aufgabe 36: (10 Punkte)
Es sei λ^2 das Borel-Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^2$. Zeige die Existenz und berechne den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|x|e^{-x^2-iy}}{1+y^{2n}} d\lambda^2(x,y)$$

Aufgabe 37: (10 Punkte)
Zeige, daß es ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und zwei stetig differenzierbare Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : I \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = g(0) = 0$ gibt, so daß

$$\begin{aligned} -x^3 + (f(x))^3 + \sin(g(x)) &= 0 \\ x^2 + e^{f(x)} + \cos(g(x)) &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 38: (10 Punkte)
Es sei $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel $\sigma-$Algebra auf $\mathbb{R}$ und $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ das Borelmaß.

a) Zeige, daß

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) &\to [0,\infty] \\ A &\mapsto \int\limits_A \frac{|x|}{1+x^2} d\lambda(x) \end{aligned}$$

ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definiert.

b) Es sei $\begin{aligned} g_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{|x|}{(1+x^2)(1+x^{2n})} \end{aligned}$. Zeige, daß $\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} g_n(x) d\lambda(x)$ existiert und

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} g_n(x) d\lambda(x) = \nu(]-1,1[) = \ln 2$$

gilt.

Aufgabe 39: (15 Punkte) Es sei $d \in \mathbb{N}$, $A \in M_d(\mathbb{R})$ eine selbstadjungierte Matrix, die nur strikt positive Eigenwerte besitzt und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$. Zeige:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle x, Ax\rangle} d\lambda^d(x) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Neu:

Aufgabe 40: (15 Punkte) Bestimme alle beschränkten Lösungen der Differentialgleichung

$$x' = 3(tx)^2 - 12t^2 \tag{1}$$

mit maximalem Definitionsbereich.

Aufgabe 41: (15 Punkte) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = -\tan(y)e^y, \quad y(0) = -1$$

a) Zeige, daß das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung auf $\mathbb{R}_+ = [0,\infty[$ besitzt.

b) Bestimme $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$.

Aufgabe 42: (15 Punkte)

$$x' = \frac{xt}{\sqrt{x^2+1}} \quad , \quad x(0) = 1 \tag{2}$$

Zeige:

a) Das Anfangswertproblem (2) hat eine eindeutige maximale Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$.

b) Für das maximale Lösungsintervall gilt: $I = \mathbb{R}$.

c) Für alle $t \geq 0$ ist $\lambda(t) \in [1, 1 + \frac{t^2}{2}]$.

Aufgabe 43: (15 Punkte) Für welche $p \in]0, \infty[$ besitzt das Anfangswertproblem

$$x' = x^p,\ x(0) = 1 \tag{3}$$

eine eindeutige Lösung, deren Lösungsintervall

a) $[0, \infty[$

b) $]-\infty, 0]$

enthält?